

(断熱変化における理想気体のする仕事) adiabatic1-090130qa.tex

1. 物質量  $n$  モルの理想気体が、初め温度が  $T_0$  であって、その体積が断熱的に 3 倍に膨張した。比熱比を  $\gamma$ 、気体定数を  $R$  として、この気体のする仕事  $W$  を  $\gamma, R, T_0$  で表す関係式を求めよ。ただし、断熱変化の場合、理想気体の圧力  $p$ 、体積  $V$  の間に、 $pV^\gamma = \text{constant}$  (ポアソンの法則) が成立する。
2. 物質量 1 mol(モル) の理想気体が初め温度 25C で、 $\gamma = 1.40$  であるとき、気体が(外界に)した仕事を計算せよ ( [joule] )。ただし、 $R = 8.3145\text{joule}/(\text{K} \cdot \text{mol})$  とする。

(解答例)

1. 初めの体積, 圧力(  $V_0, p_0$  ), 終わりの体積 (  $V, p$  ), 今は  $V = 3V_0$  ) の場合に気体が外部に行う仕事  $W$

$$W = \int_{V_0}^V p dV. \quad (1)$$

断熱変化であるからポアソンの法則より、 $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$  を式(1)に代入して

$$\begin{aligned} W &= p_0V_0^\gamma \int_{V_0}^{3V_0} V^{-\gamma} dV = \frac{p_0V_0^\gamma}{1-\gamma} \{(3V_0)^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}\} \\ &= \frac{p_0V_0^\gamma}{1-\gamma} (3^{1-\gamma} - 1)V_0^{1-\gamma} = \frac{3^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} p_0V_0 \\ &= \frac{1 - 3^{1-\gamma}}{\gamma - 1} nRT_0 \end{aligned} \quad (2)$$

2. 与えられた具体的な値を式(2)代入して

$$\begin{aligned} W &= \frac{1 - 3^{-0.4}}{0.4} \times 8.3145 \frac{\text{joule}}{\text{K}} \times (273 + 25)\text{K} \\ &= 2203 \text{ joule} \end{aligned} \quad (3)$$

3. 第1問の別解:

熱力学第一法則を断熱過程に適用する。ここでは簡単のため 1 モルとする。

$$\Delta U = Q - W = -W, \quad (4)$$

$$W = -\Delta U = -C_v(T - T_0), \quad (5)$$

となる。ここで、理想気体では  $U = C_v T + \text{constant}$  であることを用いた。一方、断熱過程の場合、 $pV^\gamma = \text{constant}$  に状態方程式  $pV = RT$ ,  $p_0V_0 = RT_0$  を代入して  $TV^{\gamma-1} = T_0V_0^{\gamma-1}$  となる。これらより

$$T = T_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1}. \quad (6)$$

理想気体の性質 (マイヤーの法則)  $C_p - C_v = R$  より  $C_v = R/(\gamma - 1)$  となるので

$$W = \frac{R}{\gamma - 1} (T_0 - T_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1}) = \frac{1 - 3^{1-\gamma}}{\gamma - 1} RT_0. \quad (7)$$