波動の物理学入門(1次元系)

filename=wave-1dim-text141019A.tex
made by R. Okamoto(Emeritus Prof. of Kyushu Inst. of Tech.)
（＊印の項目は初回学習時にはスキップしてよい。）

1　波動は何か

1.1　波動と粒子

手紙と電話は遠方の友人、知人に連絡をとる 2 通りの方法である。第一の方法（手紙）は、「粒子」の概念を含む : 物体が、ある点から他の点に情報とエネルギーを伴って、移動する。第二の方法（電話）は、「波動」の概念を含む : 波動によっても、ある点から他の点に情報とエネルギーが伝わっていくが、物質自身は移動しない。

レオナルド・ダビンチの言葉
「波は発生点から広がって消えてしまうが、水自身が消えさるわけではない。同様に、穂波が麦畑を走るように見えても、麦自身はその場所にとどまっている。」

波動と粒子は古典物理学における 2 つの重要な概念で、ほとんどすべての物理現象は、粒子または波動に関係づけることができる。粒子はエネルギーを運ぶことのできる 1 点に集中した小さな物質を想像させる。波動は、波の伝わる空間に広く分布したエネルギーを連想させる。

1.2　波動の種類

1. 力学的な波:水波、音波、地震波。ニュートンの運動法則に支配されており、波を伝える媒質（水、空気、岩 石等）があってはじめて存在できる。波とその媒質の種類により、速さが変わる。

2. 電磁波（光波）: 可視光、紫外線、ラジオやテレビなどの波、マイクロ波、レーダー波、X線、など。これらの波はマックスウエル方程式に支配され、それを伝える媒質を必要としない。宇宙からの光はほとんど真空である宇宙空間を通って地球に到達している。すべての電磁波は真空中を一定の速さで伝わり、その速さは波源や観測者の運動には無関係。

3. 物質波（またはド・ブローイ波）電子、陽子、他の素粒子、原子、分子に関係したものであり、われわれは通常、これらを構成物質と考えているので、これらの波は物質波と呼ばれる。(正確には、量子力学におけるシュレーディンガー方程式を満たす複素空間の抽象的な波動, 存在確率の振幅のこと。)

以下、本稿では力学的波動を中心に説明する。

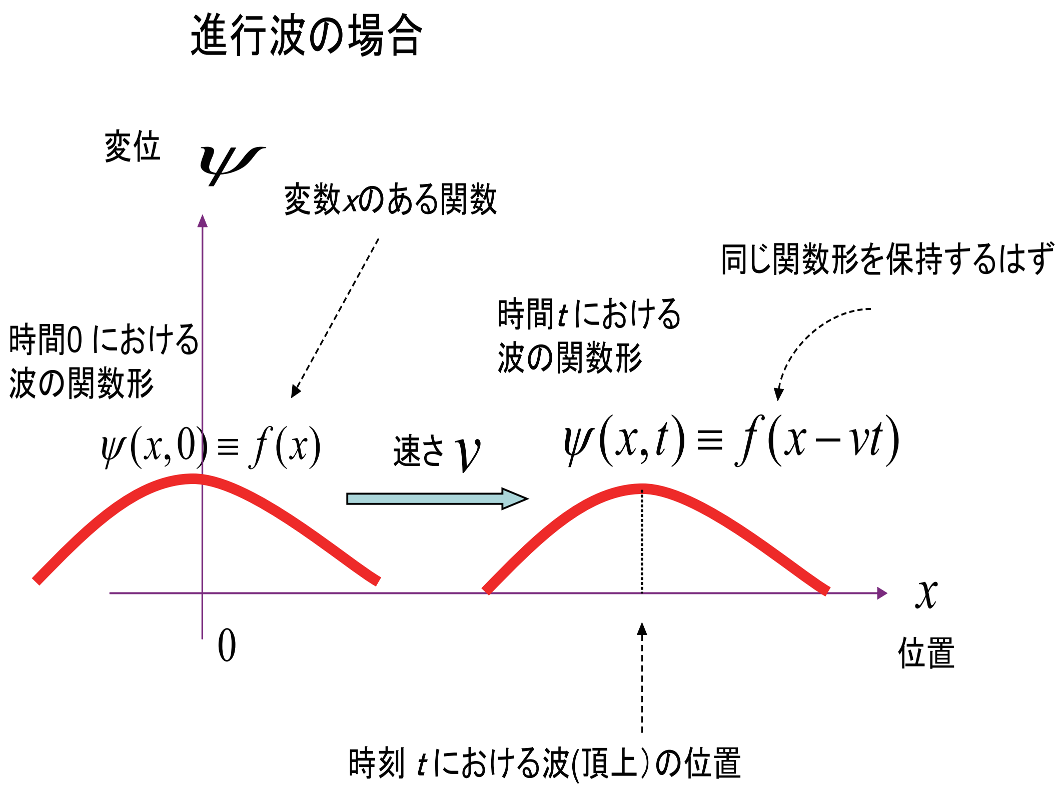
1.3　横波、縦波とそれらに分類されない波動

1. 縦波 (longitudinal wave):ピストンや管の中の空気中の音波を考える媒質の各微小要素の運動が波の伝わる方向と平行している波。
2. 横波（ traveling wave）:ひも (弦) の一部である各微小要素の運動方向が波の伝わる方向と直交している波。
3. 液体を伝わる波は縦波でも横波でもない。縦波でも横波でもない波動が身近な水の波として起きている [1, 2, 5]

2　波動方程式と波動の重ね合わせの原理

2.1　波動の一般的な表現

自然界の種々の波動は一定の時間後に減衰する。しかし、まず理想化して，減衰しない波動を考える。そして，波動現象の基本的な物理量としては釣り合いからの変位を考え、時刻 t，位置 x における変位を $\psi(x,t)$ と書くことにする。初めの時刻 (時刻 0) における波動の波形を数学的に表す関数を，位置 x の関数 $f = f(x)$ とする。すなわち、$\psi(x,0) = f(x)$ と書ける。図のように、x 軸の正の向きに速さ v で進む波動は、任意の時刻 t においても同じ波形、すなわち，元と同じ関数形をもつはずである。これを式で表現すれば、同じ関数



$f(x)$ を用いて、$\psi(x,t) = f(x - vt)$ と書ける。

2.2 波動方程式

このように表される波動はどのような法則に従うだろうか。あるいは、どのような微分方程式を満たすであろうか。このことを調べるために、次のように偏微分を計算してみる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{df(u)}{du},\ (u \equiv x - vt) &(2.1)\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= (-v)^2\frac{d^2f(u)}{du^2} = v^2\frac{d^2f(u)}{du^2}, &(2.2)\\ \frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df(u)}{du},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{d^2f(u)}{du^2}. &(2.3)\end{aligned}$$

ここで、合成関数の微分公式を用いた。以上の結果より，時間と座標について 2 階の偏微分方程式

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.4}$$

が得られる。これは波動方程式と呼ばれ、波動であれば必ず満たす微分方程式である。(参考: x と vt が同じ次元をもつことに注意すれば，微分方程式の表現で、波の速さ v を別の位置に置かれても混乱はないであろう。) x 軸の負の向きに速さ v で進む波動について，別の関数 $g(x)$ を考えれば、$\Psi(x,t) = g(x+vt)$ も同じ波動方程式 (2.4) を満たすことは明らかであろう。注意すべきことは、波動方程式 (2.4) が数学的に意味をもつためには、波動を表す関数 (波動関数)$\Psi(x,t)$ は座標 x と時間 t について 2 階微分可能でなければならない[3] ことである。すなわち、$\Psi(x,t)$ の一次微分は滑らかでなければならない。

2.3 波動の重ね合わせの原理

同じ速さ v をもつ 2 つの波動, $\psi_1(x,t)$, $\psi_2(x,t)$ があるとする。このとき

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

が成立する。ここで、実数または複素数でもよい任意の定数 c_1, c_2 を用いて、これらの 2 つの波動の一次結合 $\Psi(x,t)$ を $\Psi(x,t) \equiv c_1\psi_1(x,t) + c_2\psi_2(x,t)$ のように定義する。式 (2.5) を用いれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= c_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(c_1\psi_1(x,t) + c_2\psi_2(x,t)\right)\\ \to \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} &(2.6)\end{aligned}$$

が成立する。2 つの波動の一次結合 $\Psi(x,t)$ も同じ波動方程式を満たす波動である。波動方程式の特徴から決まるこの性質を重ね合わせの原理という。3 つ以上の波動に対しても，重ね合わせの原理は成立する。このように、重ね合わせの原理が成立するのは、波動方程式が変位 ψ について、1 次しか含まない、すなわち，線形だからである。

後述するように、重ね合わせの原理は干渉，回折など波動特有の現象が現れるための波動の基本的性質である。

3 正弦関数または余弦関数により表される波動ー波動の数学的標準原器

3.1 平面波の基本的物理量

正弦関数または余弦関数により表される波動は単純かつ理想的な波動で、波動の数学的標準原器 [5] の役割を果す。また角度を $\pi/2$ だけずらせば，相互に移り変わる。そこで一般性を失わずに、波動方程式 (2.4) を満たす関数として、正弦関数と定数 k および任意定数 A, δ を用いて $\psi(x,0) \equiv A\sin(kx+\delta)$ とすると

$$\psi(x,t) \;=\; A\sin[k(x-vt)+\delta] \tag{3.1}$$

となる。これは x 軸の正の向きに進む正弦波である。式 (3.1) が波動方程式 (2.4) を満たすことは読者自ら確認せよ。x 軸の負の向きに進む正弦波は $\psi(x,t) = A\sin[k(x+vt)]$ となる。定数 A は振幅 (amplitude) という。ここで、すぐ説明するように、定数 k は波動の重要な物理量で、波数 (wave number) という。波数 k は三角関数の角度に相当する部分が無次元であるために必要で、長さの逆数の次元をもつ。また、角度は特に断らない限り、弧度法 (ラジアン) で考えること を注意する。三角関数 (余弦関数) を採用してもほぼ同じ議論ができる。

角度の大きさに相当する $k(x-vt)+\delta$ をこの波動の位置 x、時刻 t における 位相 (phase) という。時刻 0 における位相 δ を初期位相 (initial phase) という。波動の速さは詳しくは位相速度 (phase velocity) といい、後述の群速度や、$\partial\psi/\partial t$ と 定義される媒質中の一点の速度である粒子速度または振動速度と区別する。

同じ時刻に、位相の値が同じになる媒質の点を連ねた仮想的な面を 波面 (wave front) という。正弦波の場合、波面は x 軸に垂直な平面になるので、正弦波（または余弦波）を (1 次元の）平面波 ということもある。

同一位相をもつ隣り合う 2 点間の距離を 波長 (wave length) といい、その大きさを λ で表すことにする。すなわち

$$\psi(x+\lambda,t) \;=\; \psi(x,t) \to k(x+\lambda-vt)+\delta = k(x-vt)+\delta+2\pi, \tag{3.2}$$

$$\to \lambda \;=\; \frac{2\pi}{k}. \tag{3.3}$$

同様に、同一位相をもつ隣り合う 2 つの時刻差を 周期 (period) といい、その大きさを T で表すことにする。すなわち

$$\psi(x,t-T) \;=\; \psi(x,t) \to k[x-v(t-T)]+\delta = k(x-vt)+\delta+2\pi, \tag{3.4}$$

$$\to T \;=\; \frac{2\pi}{kv}. \tag{3.5}$$

周期 T の逆数を 振動数または周波数 (frequency) といい、f と書くことにする。また以下のように、角振動数または角速度 (angular frequency) といい、ω で表す。すなわち

$$f \;\equiv\; \frac{1}{T}, \tag{3.6}$$

$$\omega \;\equiv\; 2\pi f. \tag{3.7}$$

式 (3.3)，(3.5)、(3.6) と (3.7) より

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2\pi}{\omega},\ v = \frac{\omega}{k}. \tag{3.8}$$

これら $T, f, \omega, \lambda, k, v$ が正弦波または余弦波に関する 6 つの基本量である。すると正弦波の数式は次のように複数の表現が可能であることに注意する。。

$$\psi(x,t) = \begin{cases} A\sin[k(x-vt)+\delta], \\ A\sin(kx-\omega t+\delta), \\ A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)+\delta\right], \\ A\sin\left[2\pi(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T})+\delta\right], \\ A\sin[\omega(\frac{x}{v}-t)+\delta]. \end{cases} \tag{3.9}$$

(上から 2 番目の表現がもっとも単純で，後の計算でも便利である。）正弦波の粒子速度（振動速度）は $\partial\psi/\partial t = -\omega A\cos[k(x-vt)+\delta]$ となり、位相速度が一定であることと対照的に、時間的にも空間的にも周期的に変動する。

3.2 平面波の複素数表現*

3.3 波動のエネルギー密度と強さ

密度 ρ の媒質中における正弦波の釣り合い位置からの変位を $\psi(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\delta)$ とすると、粒子速度 (振動速度）は $\partial\psi/\partial t = -\omega A\cos(kx-\omega t+\delta)$ となる。従って、波動の 進行方向に垂直な単位面積 で、幅 dx の媒質の微小体積がもつ運動エネルギー dK は

$$\begin{aligned} dK &= \frac{1}{2}(\rho\cdot 1\cdot dx)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\cos^2(kx-\omega t+\delta)\cdot dx \end{aligned} \tag{3.10}$$

と書ける。このように定義される運動エネルギーの面密度の波長あたりの平均値 $\bar{K}$ は

$$\begin{aligned} \bar{K} &\equiv \frac{\int_{x=0}^{x=\lambda} dK}{\lambda} = \frac{\rho\omega^2A^2}{2\lambda}\int_0^\lambda \frac{1}{2}\left\{1+\cos\left\{2(kx-\omega t+\delta)\right\}\right\}dx \\ \to \bar{K} &= \frac{1}{4}\rho\omega^2A^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）の面密度 U についても同様に計算する。単振動のポテンシャルエネルギーは (バネの強さ)×(変位の 2 乗）を 2 で割ったもので、かつバネの強さは（単振動の重りの質量）×（角速度の 2 乗）であることより、進行方向に垂直な単位面積で、幅 dx の媒質の微小体積がもつポテンシャルエネルギー dU は

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2}(\rho\cdot 1\cdot dx)\omega^2\psi^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2(kx-\omega t+\delta)\cdot dx \end{aligned} \tag{3.12}$$

と書ける。さらに、ポテンシャルエネルギーの面密度の波長あたりの平均値 $\bar{U}$ は

$$
\begin{aligned}
\bar{U} &\equiv \frac{\int_{x=0}^{x=\lambda} dU}{\lambda} = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2\lambda}\int_0^{\lambda} \frac{1}{2}\left\{1-\cos\left\{2(kx-\omega t+\delta)\right\}\right\} dx \\
\rightarrow \bar{U} &= \frac{1}{4}\rho\omega^2 A^2. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

と書ける。従って、力学的エネルギーの面密度の平均値 J は

$$J \equiv \bar{K}+\bar{U} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \qquad (3.14)$$

となる。さらに、波動の位相速度 v と J で定義される波動の強さ (intensity)I は

$$I \equiv J\times v = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2 \qquad (3.15)$$

となる。波動の強さは，進行方向に垂直な単位断面積あたり単位時間あたり、波動により運ばれる力学的エネルギーの意味し、その大きさは媒質の密度と位相速度と角速度の 2 乗、振幅の 2 乗に比例する。

3.4 波動の干渉

(a) 周期と位相速度が同じで, 同じ向きに進み、初期位相が異なる二つの波動の干渉
二つの波動の式が $\psi_1(x,t) = A_1\sin(kx-\omega t+\delta_1), \psi_2(x,t) = A_2\sin(kx-\omega t+\delta_2)$ と与えられているとする。波動の重ね合わせの原理にもとづいて、これらの合成波動 $\Psi(x,t)$ はは次のように、別の波動として解釈できる。

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,t) &\equiv \psi_1(x,t)+\psi_2(x,t) \\
&= A_1\sin(kx-\omega t+\delta_1)+A_2\sin(kx-\omega t+\delta_2) \\
&= (A_1\cos\delta_1+A_2\cos\delta_2)\sin(kx-\omega t)+(A_1\sin\delta_1+A_2\sin\delta_2)\cos(kx-\omega t), \\
&\equiv A\sin(kx-\omega t+\delta).
\end{aligned}
$$

ここで、三角関数の公式 (A.2) を用いた。合成波動 $\Psi(x,t)$ の振幅 A と初期位相 δ を以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
A_1\cos\delta_1+A_2\cos\delta_2 &\equiv A\cos\delta,\ A_1\sin\delta_1+A_2\sin\delta_2 \equiv A\sin\delta \qquad (3.16) \\
\rightarrow A &= \sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\delta_1-\delta_2)}, \qquad (3.17) \\
\rightarrow \tan\delta &= \frac{A_1\sin\delta_1+A_2\sin\delta_2}{A_1\cos\delta_1+A_2\cos\delta_2}. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

ここで、三角関数の公式 (A.1) を用いた。

元の波動の強さをそれぞれ I_1, I_2、合成波動のそれを $I_{(1+2)}$ とすれば、式 (3.15) と (3.17) を用いて

$$I_{(1+2)} = I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\delta_1-\delta_2) \qquad (3.19)$$

という重要な結果が得られる。波動の干渉の結果、合成波動の強さは元の波動の強さの単純な和には必ずしもならず、初期位相の差に応じて最大値と最小値の間の値をとる。これは 2 粒子の衝突とは質的に異なる特徴である。

初期位相の差 $\delta_1 - \delta_2 = 0$ の場合、最大値 $I_{(1+2)} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ となり、建設的な干渉 (constructive interference) と呼ばれることがある。また、初期位相の差 $\delta_1 - \delta_2 = \pi$ の場合、最大値 $I_{(1+2)} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ となり、破壊的な干渉 (destructive interference) と呼ばれることがある。

特に，元の波動の振幅が同じ場合、初期位相の差 $\delta_1 - \delta_2 = 0$ のとき、合成波動の強さは元の波動のそれの 4 倍になり、逆に、$\delta_1 - \delta_2 = \pi$ のとき、合成波動の強さはゼロとなる。このように、波動の物理学における「干渉」は日常用語としての「干渉」とはかなり異なり、広い意味をもつことに注意すること。

(b) 振幅、周期、初期位相と位相速度が同じだが, 逆向きに進む二つの波動の干渉:定常波 (定在波）
二つの波動が $\psi_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \delta), \psi_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t + \delta)$ と与えられているとする。波動の重ね合わせの原理にもとづいて、これらの合成波動 $\Psi(x,t)$ はは次のように

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &\equiv \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) \\ &= A\sin(kx - \omega t + \delta) + A\sin(kx + \omega t + \delta) \\ &= 2A\cos(kx + \delta)\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{3.20}$$

となって、変数 x と t は分離してしまう。このような波動は振幅が $2A\cos(kx+\delta)$ であり、時間とともに周期的に振動するだけで、右にも左にも進まない。これを定常波または定在波 (stationary wave) という。 定在波 (定常波）の動画は [6] を参照のこと。

3.5 波動の重ね合わせとフーリエ級数展開*

[2, 5]

3.6 分散性媒質における波動の群速度*

4 固定端をもつ弦の定在波-固有値問題*

A 三角関数の公式

実数 α, β に対して次ぎの公式が成立する。

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \tag{A.1}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha. \tag{A.2}$$

B　複素数の極座標表示とオイラーの公式

参考文献

[1] 原　康夫「物理学通論 I」学術図書出社，1988 年。pp.183-184.

[2] 江幡武，上村孝「振動・波動」培風館，1997 年。pp.63-70,pp.26-31,

[3] 川村　清「波動」東京教学社、1998 年。特に、pp.54-55.

[4] 和達三樹「物理のための数学」岩波書店、2000 年。特に、１章と７章。

[5] 佐藤文隆，松下康雄「波のしくみー『こと』を見る物理学」講談社ブルーバックス，2007 年。(題名からも示唆されように、やや異色の見方で波動の種々の側面を興味深く解説している。）.pp.27-36,

[6] 定 在 波　(定 常 波 ）の 動 画 。http://ja.wikipedia.org/wiki/定 在 波（ ま た は http://ja.wikipedia.org/wiki/