

2次元の球面波 (円形波) の振幅が波源からの距離 r の平方根に逆比例することを、エネルギー保存則を用いて、次の手順で示せ。ただし、波源から発生した波が媒質中で吸収されないとする。

1. 円周の単位長さあたり、単位時間あたり通過する波動のエネルギー (= 波の流れ) を I として、 I と r の関係式を求めよ。
2. 波動のエネルギー (= 波の流れ) I が波動の振幅 A の2乗に比例するとして、振幅 A と波源からの距離 r の関係式を求めよ。

(解答例)

1. 波源を中心にして描いた同心円の円周を、単位時間に通過するエネルギーは、どの同心円でも同じである。すなわち

$$\begin{aligned} 2\pi r I &= \text{constant} \equiv c_1 \\ \rightarrow I &= \frac{c_1}{2\pi r} \end{aligned} \quad (1)$$

となる。(c_1 : 定数)

2. 円周の単位長さあたり、単位時間あたり通過する波動のエネルギー (= 波の流れ) を I とすると、これは波動の振幅 A の2乗に比例する。すなわち

$$I = \text{constant} \times A^2 \equiv c_2 A^2. \quad (2)$$

(c_2 : 定数) 式 (1) を式 (2) に代入すると

$$\begin{aligned} c_2 A^2 &= \frac{c_1}{2\pi r} \\ \rightarrow A &= \sqrt{\frac{c_1}{2\pi c_2}} \sqrt{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (3)$$

よって、題意は示された。

(備考: この問題で示されたように、2次元球面波は媒質中で、波のエネルギー吸収がない場合でも、エネルギー保存則により、波の振幅は波源からの距離の平方根に反比例して減衰する。この点は、1次元正弦波 (余弦波) とは対照的である。)