

波の概念、性質、波の数式

波と粒子

波の種類

縦波と横波

さそりはどうやって餌の場所を正確に知るのだろうか？

波の式

波動関数の複素数表現

波のエネルギーと強さ

R. Okamoto, Kyushu Inst. Of Technology

波と粒子

手紙と電話は、遠方の友人、知人に連絡をとる2通りの方法である。

第一の方法(手紙)は、「粒子」の概念を含む：

物体が、ある点から他の点に情報とエネルギーを伴って、移動する。

第二の方法(電話)は、「波動」の概念を含む：

波動によっても、ある点から他の点に情報とエネルギーが伝わっていくが、物質自身は移動しない。

レオナルド・ダビンチの言葉

「波は発生点から広がって消えてしまうが、水自身が消えさるわけではない。同様に、穂波が麦畑を走るように見えても、麦自身はその場所にとどまっている。」

波動と粒子は古典物理学における2つの重要な概念：

ほとんどすべての物理現象は、粒子または波動に関係づけることができる。

粒子はエネルギーを運ぶことのできる1点に集中した小さな物質を想像させる。

波動は、波の伝わる空間に広く分布したエネルギーを連想させる。

波の種類

1. 力学的な波

水波、音波、地震波。

ニュートンの運動法則に支配されており、波を伝える媒質(水、空気、岩石等)があってはじめて存在できる。波とその媒質の種類により、速さが変わる。

2. 電磁波(光波)

可視光、紫外線、ラジオやテレビなどの波、マイクロ波、レーダー波、X線、など。これらの波は、マックスウエル方程式に支配され、それを伝える媒質を必要としない。宇宙からの光はほとんど真空である宇宙空間を通過して地球に到達している。すべての電磁波は真空中を一定の速さで伝わり、その速さは波源や観測者の運動には無関係。

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

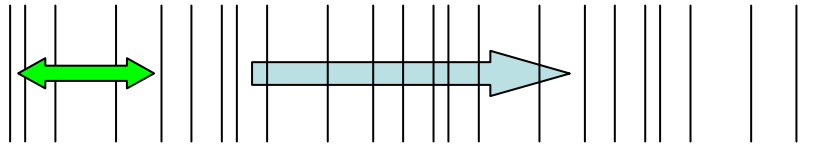
3. 物質波(またはド・ブローイ波)

電子、陽子、他の素粒子、原子、分子に関係したものであり、われわれは通常、これらを構成物質と考えているので、これらの波は物質波と呼ばれる。

縦波と横波

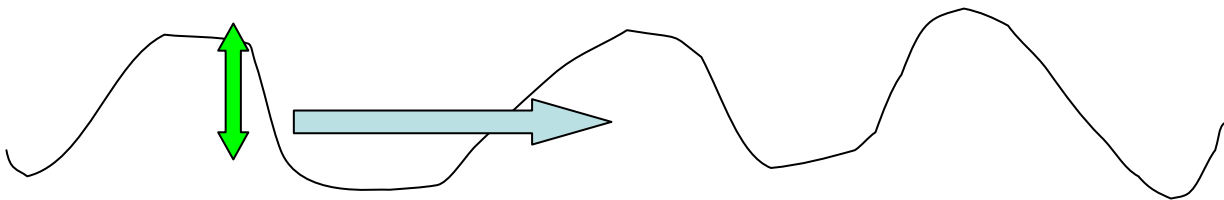
1. 縦波 (longitudinal wave)

ピストンや管の中の空気中の音波を考える
媒質の各微小要素の運動が波の伝わる方向と平行している波



2. 横波 (traveling wave)

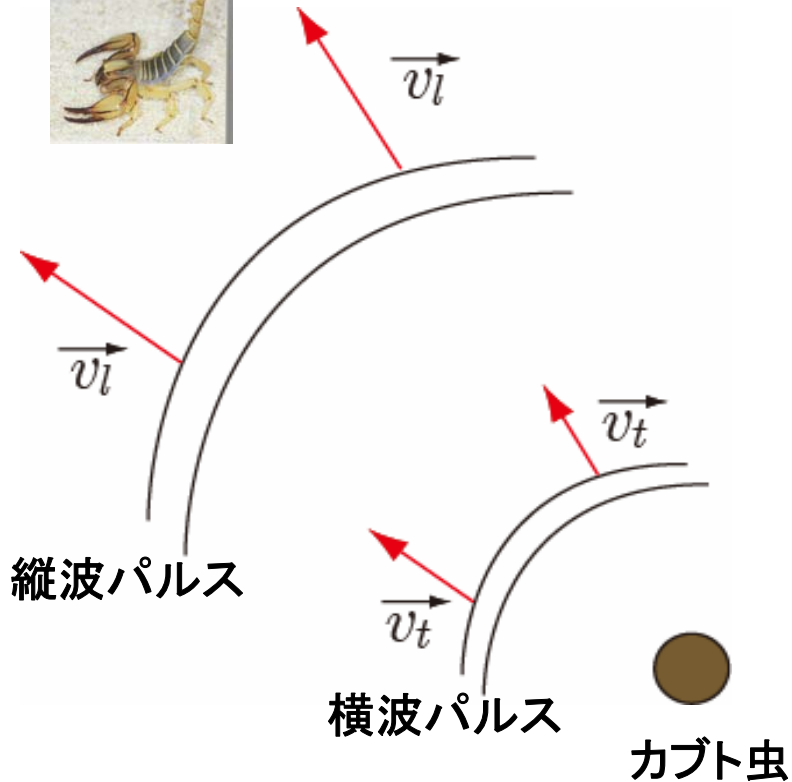
ひも的一部である各微小要素の運動方向が波の伝わる方向と直交している波



このさそりはどうやって餌の場所を正確に知るのだろうか？



- ・砂サソリは、数十センチ以内に近づいたカブトムシが動くと、素早く向きを変えてカブトムシに飛びつく（昼食のために）。
- ・夜行性の砂サソリにはカブトムシは見えないし、カブトムシの足音を聞くわけでもない。



サソリは8本の足を直径約5cmの円を描くように広げる。

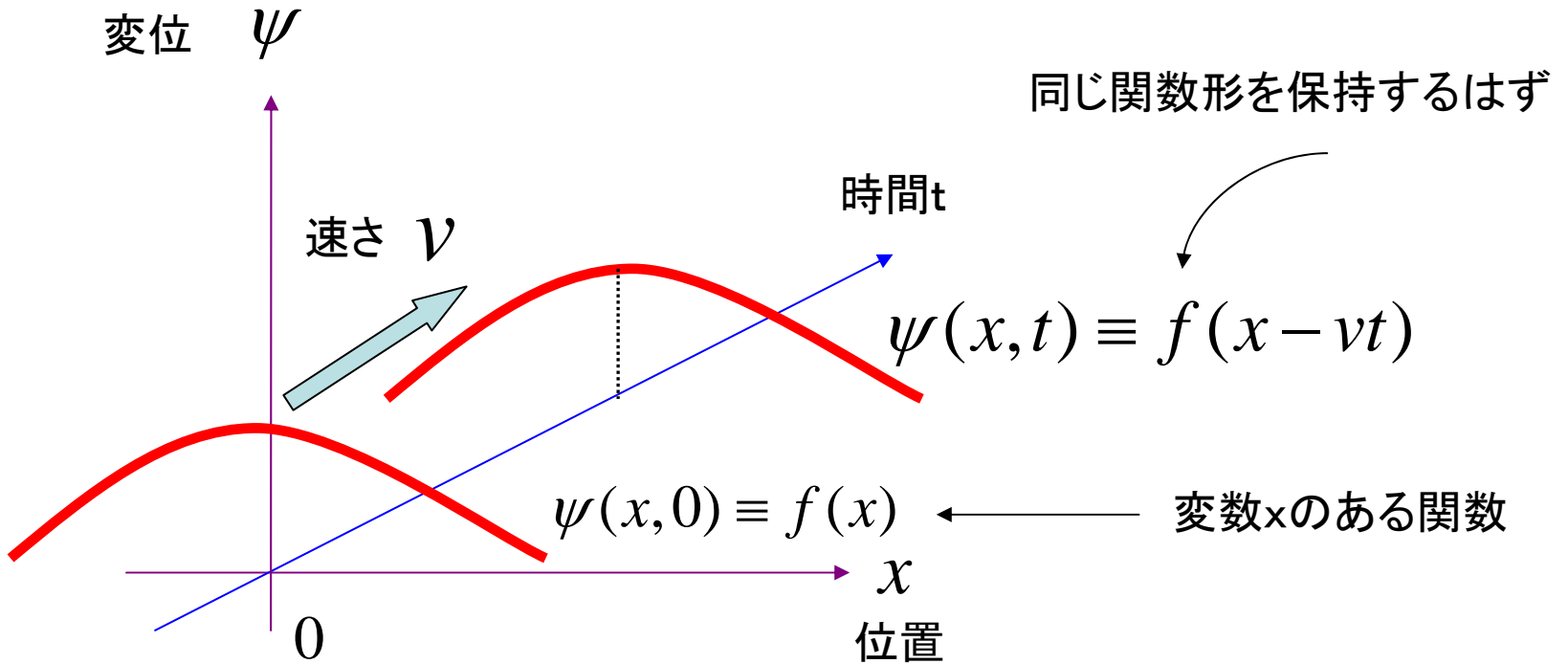
カブト虫がほんの少しでも砂地を乱すと、砂の表面に沿って波のパルスが伝わる。

サソリは伝播速度の大きな縦波をまず感知し、カブト虫の方向を向く。これはどの方向の足が最初にパルスを検出するかで決まる。

次に、サソリは、遅れて到着する横波を感知し、最初の縦波パルスからの時間差 Δt を測って、カブト虫までの距離 d を決定する。

波の式

進行波の場合



関数形として正弦関数を選ぶと

$$\psi(x, t) \equiv A \sin[k(x - vt)]$$

Ψと同じ次元をもつ定数

正弦関数の角度部分を無次元にするために必要な「定数」

波長 λ $k[(x + \lambda) - vt] = k(x - vt) + 2\pi$
 $k\lambda = 2\pi \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} : \text{波数}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$

周期 T $k[x - v(t - T)] = k(x - vt) + 2\pi$
 $kvT = 2\pi \rightarrow T = \frac{\lambda}{v}$

角振動数(角速度)

$$\omega \equiv 2\pi f \equiv \frac{2\pi}{T}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

進行する正弦波の数学的表現

変位
↓
振幅
↓

振動項
┌───────────┐
位相
┌───────────┐

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

プサイ(psi、プシー)と発音する。 波数 位置 角振動数 時間

最初の時刻、原点において、変位はゼロとは限らないので、初期位相(または位相定数)を ϕ とする場合の一般の正弦波の関数形

$$\psi(x, t) = A \sin[(kx - \omega t) + \phi]$$

初期条件(境界条件)を使えば、位相定数の値は決まる。

他の表現も可能であることに注意する！

波の速さ

位相速度: 波全体のパターンが移動する速さ、波面〔位相〕の移動する速さ
(注意: 信号の伝わる速さではない)

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda = f \lambda$$

粒子速度(振動速度): 微小要素が変動する速度

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t)$$

比較: 群速度: 波束の移動する速さ

後退する正弦波の数学的表現

変位
↓
振幅
↓
振動項
┌───────────┐
位相
┌───────────┐
波数 位置 角振動数 時間

$$\psi(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

プサイ(psi、プシー)と発音する。

最初の時刻、原点において、変位はゼロとは限らないので、初期位相(または位相定数)を ϕ とする場合、後退する正弦波の一般的な関数形

$$\psi(x, t) = A \sin[(kx + \omega t) + \phi]$$

初期条件(境界条件)を使えば、位相定数の値は決まる。

他の表現も可能であることに注意する！

波動関数の複素数表現

正弦波と同様に、余弦関数を用いることができる。そして、進行する正弦波と余弦波をまとめて、複素数であらわすことができる！

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &\equiv Ae^{i(kx - \omega t + \phi)} \\ &\equiv A \exp[i(kx - \omega t + \phi)] \\ &= A[\cos(kx - \omega t + \phi) + i \sin(kx - \omega t + \phi)]\end{aligned}$$

$$\rightarrow \operatorname{Re} \Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi),$$

$$\operatorname{Im} \Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi).$$

後退する波も同様に

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &\equiv Ae^{i(kx + \omega t + \phi)} \\ &\equiv A \exp[i(kx + \omega t + \phi)] \\ &= A[\cos(kx + \omega t + \phi) + i \sin(kx + \omega t + \phi)]\end{aligned}$$

$$\rightarrow \operatorname{Re} \Psi(x, t) = A \cos(kx + \omega t + \phi),$$

$$\operatorname{Im} \Psi(x, t) = A \sin(kx + \omega t + \phi).$$

波のエネルギーと強さ

波の進行方向に垂直な単位面積を単位時間に通過するエネルギーを波の強さ (intensity) と呼び文字 I で表すことが多い。

質量 m の物体が振幅 A , 振動数 f で単振動する場合の力学的エネルギー (の時間平均値) は

$$\frac{1}{T} \left[\int_0^T \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) dt \right] = \frac{1}{2} \omega^2 m A^2, \text{ばね定数 } \kappa = m \omega^2, \omega \equiv 2\pi f$$

波が速さ (位相速度) v で密度 ρ の媒質中を Δt 時間に伝わる場合、質量 $m = \rho v \Delta t$ となるので、波の強さは

$$I = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \rho v$$

$$(\text{波の強さ}) = \frac{1}{2} (\text{角振動数})^2 (\text{振幅})^2 (\text{媒質密度}) (\text{位相速度})$$