§1.2 運動の法則（問の詳解例）

26

p.15

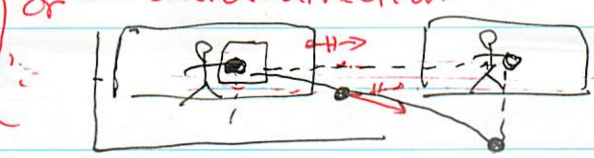
26 等速度で動いている電車の窓から手を出し，手にもっていた金属球を放した．空気抵抗を無視できるとして，金属球はどこに落下するか．手の真下か，手の真下より前方か，それとも手の真下より後方か．

問 26　手の真下に落下する．

電車内からみて（手からみて）

車外からみると，その瞬間の手の真下より前方

「どこに」＝「どの方向に」の意味ならば，手の真下に落下
or in which direction



(∵) 水平方向の速度の成分は人と球では同じだから

27 宇宙空間で，二つの物体のうちどちらの質量が大きいか測定するにはどうすればよいか．

p.17

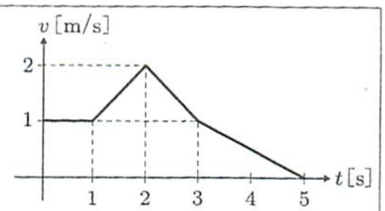
問 27　同じ力を加えて運動させ，加速度を測定する．加速度が小さいほうが質量が大きい．

$ma = F$ より　$m_1 a_1 = m_2 a_2$ となる．同じ大きさの力を加えたので

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$ であるから，$a_1 > a_2$ ならば $m_1 < m_2$

p.17

28 質量 2 kg の物体が一直線上を運動している．その速度は時間の経過と共に，図のように変化した．
（1） 物体に力がはたらいていなかったのは，何秒から何秒の間か．
（2） はたらいていた力（合力）がもっとも大きいのは いつか，また，そのときの力の大きさは何 N か．
（3） 力と経過時間の関係を示すグラフを書け．



問 28　(1) 0 秒から 1 秒　(2) 1 秒から 2 秒，$F = 2 \times (2-1)/(2-1) = 2\,\mathrm{N}$ (3) 略

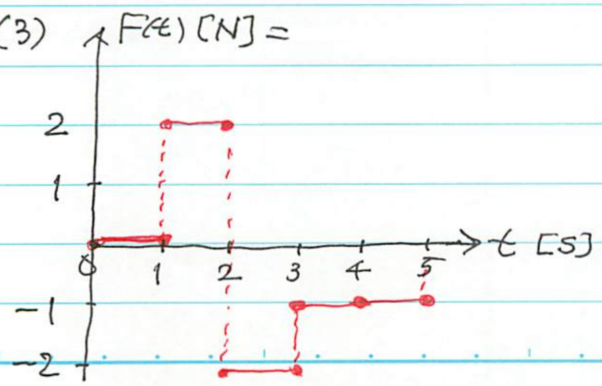
(1) $ma = F$ だから $F = 0$ のとき $a = 0 \to v$：一定

∴ $0_s \leqq t \leqq 1_s$

(2) F：最大になるのは，a 最大のとき．すなわち v-t 図の傾き ~~の大きさが~~ が正で最大のとき

$1_s \leqq t \leqq 2_s$ で $\boxed{F = \dfrac{ma}{m} = \dfrac{m(v_2 - v_1)}{m \Delta t} = \dfrac{(2-1)\,\mathrm{m/s} \times 2\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{s}} = 2\,\mathrm{N}}$

(3)



$3_s \leqq t \leqq 5_s$ では $F = ma$

$= m\dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

$= 2\,\mathrm{kg}\dfrac{(0-1)\,\mathrm{m/s}}{2\,\mathrm{s}}$

$= -1\,\mathrm{N}$

p.17

29 月面上で，質量 5 kg の物体に，7 N の力を加えたとき，加速度はいくらか．

問 29　$a = 7/5 = 1.4\,\mathrm{m/s^2}$

$ma = F$ より

$a = \dfrac{F}{m}$

$= \dfrac{7\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{kg}} = 1.4\,\mathrm{m/s^2}$

p.17

30 落下している質量 1 kg の物体の加速度を測定すると $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ であった．この物体にはたらいている力はいくらか．

問 30　$9.8\,\mathrm{kg\cdot m/s^2} = 9.8\,\mathrm{N}$

$ma = F \rightarrow F = 1\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}$

$= 9.8\,\mathrm{kg\cdot m/s^2}$

$= 9\mathrm{N}$

p.17

31 右図に示したように，軽く丈夫なひもに質量 $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ の物体をつけ，上方に力 F_T を加えた．次の問に答えなさい．

(1) 一定の速度で上昇し続けるためには，ひもで上方に引く力 F_T はいくらか．

(2) 上向きの加速度が $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$ であるとすれば，ひもで上方に引く力 F_T はいくらか．

(3) $F_T = 9.8\,\mathrm{N}$ の力で上方に引くと，上向きの加速度 a はいくらになるか．

問 31 (1) $F = F_T - mg = 0$ より，$F_T = 4.9\,\mathrm{N}$

(2) $F = F_T - mg = ma$ より，$F_T = 5.9\,\mathrm{N}$

(3) $ma = F_T - mg$ より，$a = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$

(1) 一定の速度 → 加速度 0 → 力ゼロ（2つの力のつりあい）

$0 = F_T - mg$

$\therefore F_T = 0.5\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}$

$= 4.9\mathrm{N}$

(2) $ma = F_T - mg$ より

$F_T = m(a+g)$

$= 0.5\,\mathrm{kg}\,(2+9.8)\,\mathrm{m/s^2}$

$= 5.9\mathrm{N}$

(3) $m\cdot a = 9.8\mathrm{N} - mg$

$a = \dfrac{9.8 - 0.5\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{ms^{-2}}}{0.5\,\mathrm{kg}}$

$= 9.8\mathrm{N}$

32 速度 v_0 で走ってきた電車が急ブレーキをかけた．ブレーキによる力の大きさは一定値 F_0 であったとして，時刻 t における速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を求めなさい．

問 32　$v(t) = v_0 - (F_0/m)t$,
$x(t) = v_0 t - (F_0/2m)t^2$

∵ 平均加速度 $\bar{a}$ の定義より

$m\cdot\left(\dfrac{v(t) - v_0}{t}\right) = -F_0 \rightarrow v(t) = v_0 - \left(\dfrac{F_0}{m}\right)\cdot t$

または一定加速度の運動の公式から

$\bar{a} = -\dfrac{F_0}{m}$

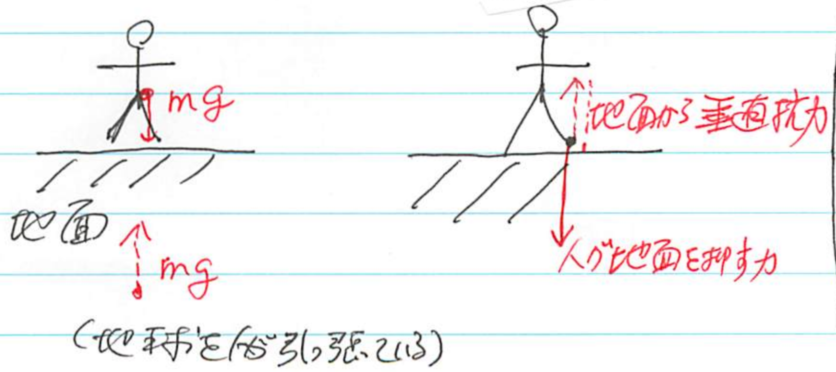
$v(t) = v_0 - \dfrac{F_0}{m}t$

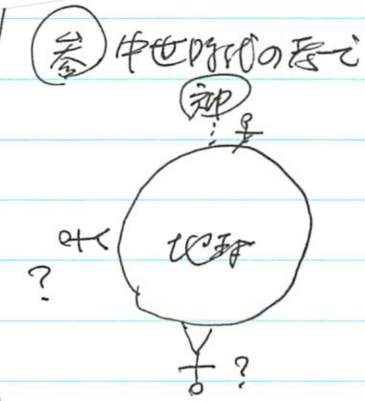
$x(t) = 0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{F_0}{m}\right)\cdot t^2$

$= v_0 t - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{F_0}{m}\right)\cdot t^2$

P.17 **33** 人にはたらく重力の反作用はどういう力か．人が足で地面を押す力の反作用はどういう力か．

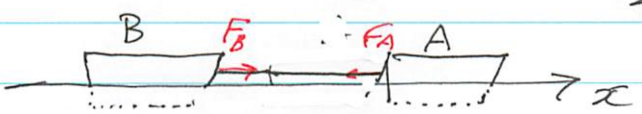
問 33　人は万有引力により地球全体を引っ張っている．これが，人にはたらく重力の反作用になっている．地球の表面が人の足を押す弾性力が，人が足で地面を押す力の反作用である．





P.17 **34** 質量 200 kg の船 A と質量 100 kg の船 B が 100 N の力で引き合った．A が B を引く力の方向に x 軸をとり，2 秒後の船の速度を求めなさい．

問 34　$v_A = -1\,\mathrm{m/s}$，$v_B = 2\,\mathrm{m/s}$



※ 初めは船A, Bはともに静止していたとする．

$|F_A| = |F_B| = 100N$

Aについての運動方程式: $\boxed{m_A a_A = -100N} \to a_A = -0.5\,m/s^2$

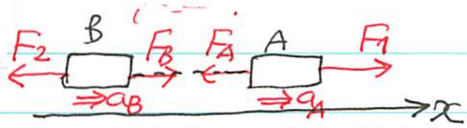
$v_A(t) = 0 + a_A t$
$= -1\,m/s$

Bについて: $\boxed{m_B \cdot a_B = +100N} \to a_B = +1.0\,m/s^2$

$v_B(t) = 0 + a_B t$
$= +2\,m/s$

P.17 **35** 質量 m_1，m_2 の二つの物体 A，B をひもでつないで，物体 A を力 F_1 で x 方向に物体 B を力 F_2 で $-x$ 方向に引っ張るとき，物体 A，B の加速度 a_A，a_B と A，B をつなぐひもが A，B を引っ張る力の大きさ F_A，F_B を求めなさい．

問 35　$a_A = a_B = (F_1 - F_2)/(m_1 + m_2)$，
$F_A = F_B = (F_1 m_2 + F_2 m_1)/(m_1 + m_2)$



※文字式は全て⊕とする!

Aについて: $m_1 a_A = F_1 - F_A$ …①

Bについて $m_2 a_B = -F_2 + F_B$ …②

作用反作用則: $F_A = F_B$ …③

4つの未知数(a_A, a_B, F_A, F_B)に3つの方程式 → 1つ不足

→ AとBは一体となって動くはず:

$a_A = a_B$ …④

①+②で、③, ④を用いると

$(m_1+m_2)a_A = F_1 - F_2$

$\therefore a_A = a_B = \boxed{\dfrac{F_1-F_2}{m_1+m_2}}$ ⑤

⑤を①に代入

$F_A = F_B = F_1 - \left(\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\right)(F_1-F_2)$

$= \boxed{\dfrac{m_2F_1+m_1F_2}{m_1+m_2}}$

p.20 **37** 1 kg の物体にはたらく重力の大きさ (1 kg 重) は何 N か.

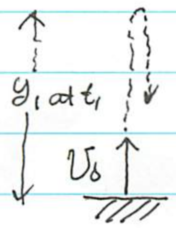
$F = mg$

$= 1\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}$

$= 9.8\,\mathrm{N}$

p.20 **38** 地上から，初速 v_0 で真上に投げ上げられた物体が最高点に達する時刻 t_1 とそのときの座標 y_1 を求めなさい．地上を原点として，上向きに y 座標をとるものとする．

問 38　$v(t_1) = v_0 - gt_1 = 0$，より $t_1 = v_0/g$.
$y(t) = v_0 t - (g/2)t^2$ に代入して，$y_1 = v_0^2/2g$



時刻 t において …①

$v(t) = v_0 - gt$，$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ …②

また $t = t_1$ のとき

$v_0 - g \cdot t_1 = 0$ …

$t_1 = \frac{v_0}{g}$ …③

③を②に代入

$y(t_1) = v_0 \times \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2$

$= \frac{v_0^2}{2g}$

(別解)

鉛直面内における放物運動の最高高度を与えられた情報についての次元解析を用いて推定してみよう．関係しそうな物理量を粒子の質量 m，初めの速さ v_0，重力加速度の大きさ g と推定することから始める．一般に，質量を M，長さを L，時間を T と記す．この粒子の最高高度 h を $h^\alpha v_0^\beta g^\gamma$ の形であると仮定して，この式の両辺の次元が一致するべきと考えて，α, β, γ の値を決めることにより，h の m, v_0, g への関数形を推定せよ．

(解答例)

v_0, g のそれぞれの次元は以下の通りである。

$$[v_0] = LT^{-1},\ [g] = LT^{-2}. \tag{1}$$

両辺の次元を比較すると

$$\begin{aligned} L^1 &= M^\alpha (LT^{-1})^\beta (LT^{-2})^\gamma \\ &= M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-\beta-2\gamma}. \end{aligned} \tag{2}$$

両辺の次元が一致するべきであるから

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ 1 &= \beta + \gamma, \\ 0 &= -\beta - 2\gamma. \end{aligned} \tag{3}$$

すなわち，$\alpha = 0,\ \beta = 2,\ \gamma = -1$ と決まる．従って，最高高度の関数形は

$$h \approx \frac{v_0^2}{g} \tag{4}$$

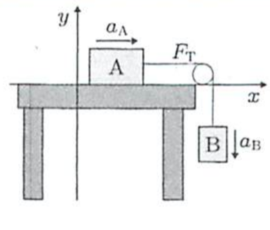
であると推定される．

(備考：正しい計算結果は $h = v_0^2/(2g)$ であるが，次元解析による推定はその簡単に比べ，実際的な場面で有効であることが多い．)

P.18

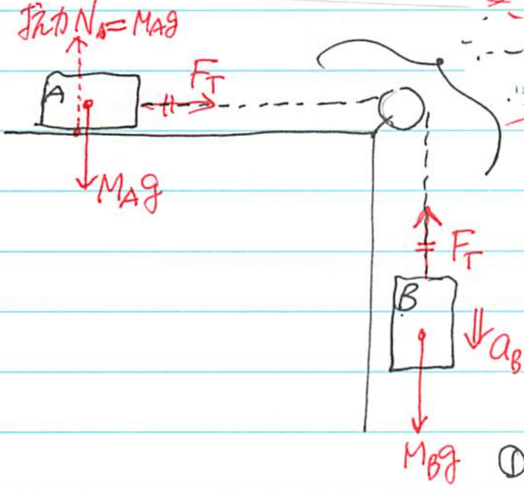
36 右図のように，滑らかな机の上に，質量 M_A の物体 A がある．これに軽い伸びない糸をつけ，軽い滑らかな滑車を通して他端に質量 M_B の物体 B をつける．はじめ手で止めておき，静かに手を離した．物体 A，B に対する運動方程式を書き，物体 A，B の加速度 a_A，a_B 及び糸が物体を引いている力 F_T を求めなさい．

ただし，重力の加速度を g とする．物体の A，B の加速度 a_A，a_B は図に示された方向を正としなさい．



問 36　運動方程式 $M_A a_A = F_T$，$M_B a_B = M_B g - F_T$，条件式 $a_A = a_B$ より $a_A = a_B = M_B g/(M_A + M_B)$，$F_T = M_A M_B g/(M_A + M_B)$

⊙ F_T と F_T' が異なるとすると，糸が伸びないことに矛盾



A の右方向について

$$m_A \cdot a_A = F_T \cdots ①$$

B の鉛直下向きについて

$$M_B a_B = M_B g - F_T \cdots ②$$

条件式（拘束）

$$a_A = a_B \cdots ③$$

①＋②に③を用いて

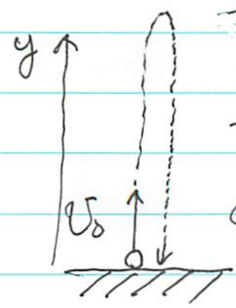
$$a_A = a_B = \left(\frac{M_B}{M_A + M_B}\right) g \cdots ④$$

④を①に代入

$$F_T = \left(\frac{M_A M_B}{M_A + M_B}\right) g \cdots ⑤$$

P.20 **39** 地上から，初速 v_0 で真上に投げ上げられた物体が地上に達する時刻 t_2 を求めなさい．地上を原点として，上向きに y 座標をとるものとする．

問 39　$y(t_2)=0$，$y(t)=v_0t-(g/2)t^2$ より $t_2=2v_0/g$



任意の時刻 t において

$$y(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \cdots ①$$

一方，$t=t_2$ において

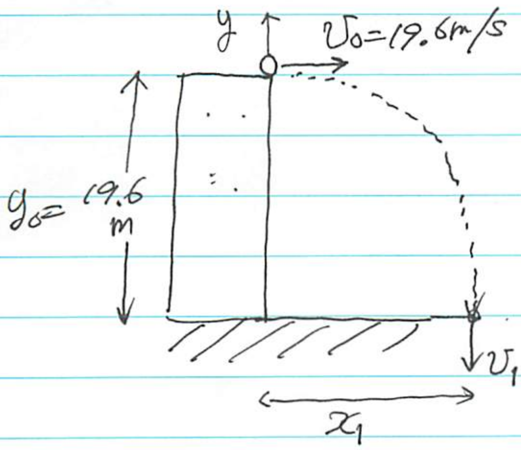
$$0=v_0\cdot t_2-\frac{1}{2}g\cdot t_2^2 \cdots ②$$

②より $t_2=0$ 以外の解は

$$t_2=\frac{2v_0}{g}$$

P.20 **40** 高さ 19.6 m のビルの屋上から，水平方向に速さ 19.6 m/s で投げ出されたボールが地上に落ちる時刻 t_1，飛距離 x_1，落下直前の速度の大きさ $v_1=\sqrt{v_{1x}^2+v_{1y}^2}$ を求めなさい．

問 40　$y(t_1)=0$，$y(t)=19.6-(9.8/2)t^2$ より $t_1=2\,\mathrm{s}$，$v_x(t)=19.6$，$v_y(t)=-9.8t$ に代入して，$v_{1x}=19.6$，$v_{1y}=-19.6$ ゆえに $v_1=19.6\times\sqrt{2}\simeq27.7\,\mathrm{m/s}$，$x_1=x(t_1)=19.6\times2=39.2\,\mathrm{m}$



任意の時刻 t において

$$y(t)=y_0-\frac{1}{2}gt^2 \cdots ①$$

$$v_x(t)=v_0 \cdots ③$$

$$v_y(t)=-g\cdot t \cdots ③$$

$t=t_1$ において

$$0=y_0-\frac{1}{2}gt_1^2$$

$$\rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2y_0}{g}}=\sqrt{\frac{2\times19.6\,\mathrm{m}}{9.8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}}=2\,\mathrm{s}$$

$t=t_1$ のとき

$$\boxed{v_x(t_1)}\equiv v_{1x}=19.6\,\mathrm{m/s}$$

$$\boxed{v_y(t_1)}\equiv v_{1y}=-9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\times2\,\mathrm{s}$$

$$=-19.6\,\mathrm{m/s}$$

$$\therefore v_1\equiv\sqrt{\left(19.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\times2}=19.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\times\sqrt{2}$$

$$\fallingdotseq 27.7\,\mathrm{m/s}$$

P.20 **41** 質量 5 kg の小石を 19.6 m/s の速度で投げ上げた．
(1) 上向きの加速度を a_y として，運動方程式を書きなさい．
(2) 小石が上がりうる最高の高さはいくらか．
(3) 3 秒後の位置と速度を求めなさい．

問 41 (1) $5 \times a_y = -5 \times 9.8$
(2) $v_y(t) = 19.6 - 9.8t$, $v_y(t_1) = 0$ より最高点に達する時刻は $t_1 = 2\,\mathrm{s}$, $y_1 = 19.6 \times 2 - (9.8/2) \times 2^2 = 19.6\,\mathrm{m}$
(3) $y(t) = 19.6t - (9.8/2)t^2$, より $y(3) = 14.7\,\mathrm{m}$, $v_y(3) = -9.8\,\mathrm{m/s}$

(1) $ma_g = -mg$ に代入

$$5\,\mathrm{kg} \times a_g = -5\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \cdots ①$$

(2) 任意の時刻 t において

$$v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t \quad \cdots ②$$

$v_{0y} = +19.6\,\mathrm{m/s}$

最高位のとき $t = t_1$ とすると

$$0 = v_{0y} - g t_1$$

$$y(t) = v_{0y} - \frac{1}{2} g t^2 \quad \cdots ③$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{19.6\,\mathrm{m/s}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}} = 2\,\mathrm{s}$$

このとき，③より

$$y_1 \equiv y(t_1)$$
$$= v_{0y} \cdot t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$
$$= 19.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times 2\,\mathrm{s} - \frac{1}{2} 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times (2\,\mathrm{s})^2$$
$$= 19.6\,\mathrm{m}$$

(3) $t_1 = 3\,\mathrm{s}$ として，②と③に代入

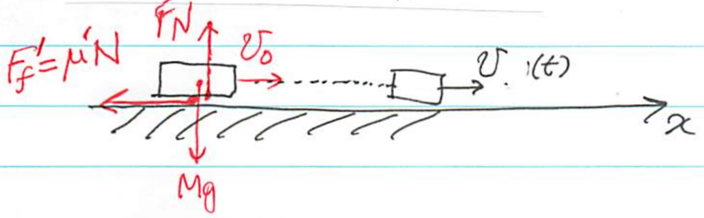
$$y(t = 3\,\mathrm{s}) = 19.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times 3\,\mathrm{s} - \frac{1}{2} 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times (3\,\mathrm{s})^2$$
$$= 14.7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_y(t = 3\,\mathrm{s}) = 19.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \times 3\,\mathrm{s}$$
$$= -9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

p.21

42 運動摩擦係数が $\mu' = 0.1$ であるとき，机の上を初速 5 m/s で滑っていた質量 7 kg の物体の2秒後の速度を求めなさい．

問 42 $a_x = -F_f'/m = -\mu' F_N/m = -0.1 \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ より，$v_x = 3.04\,\mathrm{m/s}$



F_N：垂直抗力 (normal force)

F_f'：動まさつ力 (frictional force)

運動方程式

$$m a_x = -F_f' \cdots ①$$

動まさつの法則より

$$F_f' = \mu' F_N \cdots ②$$

②を①に代入

$$a_x = -\frac{F_f'}{m} = -\frac{\mu' F_N}{m}$$

$$= -\mu' g$$

$$= -0.1 \times 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

垂直方向のつりあいより

$$0 = F_N - Mg \cdots ③$$

$v_{x0} + \quad t = 2s$

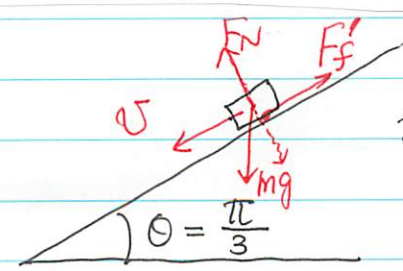
$$v_x(t) = a_x t$$

$$= 5\frac{m}{s} - 1.96\frac{m}{s}$$

$$\boxed{= 3.04\frac{m}{s}}$$

p.21

43 水平と 60° の角をなす斜面上を下向きに滑っている質量 5 kg の物体にはたらく運動摩擦力を求めなさい．運動摩擦係数が $\mu' = 0.1$ であるとしなさい．
[ヒント：垂直抗力が $F_N = mg\cos 60°$ であることに注意しなさい．]



$$F_f' = \mu' F_N \cdots ①$$

斜面に垂直な方向のつりあいより

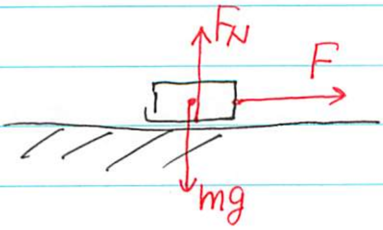
$$0 = F_N - mg\cdot\cos\theta \cdots ②$$

$$F_f' = 0.1 \times 5\,\mathrm{kg} \times 9.8\frac{m}{s^2}\cdot\cos\frac{\pi}{3} \qquad = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{= 2.45\,N}$$

p.21

44 静止摩擦係数が $\mu = 0.2$ であるとき，水平な机の上に置いてある質量 7 kg の物体を動き出させるためには，いくら以上の力を加える必要があるか．



$$F \geqq \mu F_N \cdots ①$$

$$0 = F_N - mg \cdots ②$$

②を①に代入

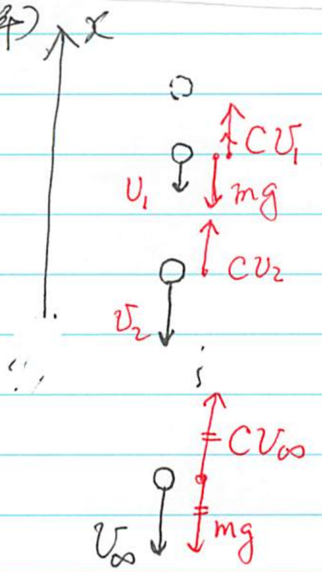
$$F \geqq \mu\, mg = 0.2 \times 7\,\mathrm{kg} \times 9.8\frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{\geqq 13.7\,N}$$

e

45 空気抵抗を受けて落下する物体の速度は最終的に一定の値に近づく．この速度を終速度という．抵抗の大きさが Cv，重力が mg であるとき，終速度 v_∞ を求めなさい．
[ヒント：力が釣り合っているという条件から求める．]

(解)



運動方程式

x軸を鉛直上向きに選んだから

vと逆向きだから

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - C\cdot v \quad \cdots ①$$

終速度の場合，$\frac{dv}{dt} = 0$ であるから

$$0 = -mg - C\cdot v_\infty$$

$$\therefore \underline{v_\infty = -\frac{mg}{C}} \quad \cdots ②$$

参考

①の一般解．

$$m\frac{dv}{dt} = -C\left(v + \frac{mg}{C}\right) \quad \leftarrow C, m, g > 0,\ 一定；既知$$

$v = v(t)$：未知

$$= -C(v - v_\infty) \quad \cdots ③$$

①or③を微分方程式という。

ここで $v(t) - v_\infty \equiv V(t) \cdots ④$ とおくと、

$$\therefore \frac{dv}{dt} - 0 = \frac{dV}{dt} \quad \cdots ⑤$$

⑤を③に代入すると

$$m\frac{dV}{dt} = -CV$$

$$\rightarrow \frac{1}{V}dV = -\frac{C}{m}dt$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{V}dV = \int\left(-\frac{C}{m}\right)dt$$

積分公式 $\int \frac{1}{x}dx = \log_e|x| + C_1$ (C_1：任意定数)

$\int dx = x + C_2$ (C_2：積分定数)

$$\log_e|V| + C_1 = -\frac{C}{m}t + C_2$$

$$\rightarrow |V| = e^{C_2 - C_1}\cdot e^{-\frac{C}{m}t}$$

$$\therefore V(t) = \underbrace{\pm e^{C_2 - C_1}}_{C'とおく}\cdot e^{-\frac{C}{m}t}$$

$$v(t) = v_\infty + C'e^{-\frac{C}{m}t}$$

(一般解 ← 積分定数を含む解)

$\boxed{0 = v(0)}$ (初期条件)

$$= v_\infty + C' \quad \therefore C' = -v_\infty$$

$$\therefore v(t) = v_\infty\left[1 - e^{-\frac{C}{m}t}\right]$$

$$= -\frac{mg}{C}\left[e^{-\frac{C}{m}t} - 1\right] \cdots (1.59)$$

P.45 46 式 (1.59) が式 (1.58) の解であることを確かめなさい.

$(\because)\ m\dfrac{dv}{dt} = -mg - cv \quad \cdots (1.58)$

一般解 $v(t) = \dfrac{mg}{c}\left(e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right)$ を t で微分すると

$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{mg}{c}\cdot\dfrac{d}{dt}\left\{e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right\}$ $\quad (\exp x \equiv e^x)$

$= \dfrac{mg}{c}\times\left(-\dfrac{c}{m}\right)e^{-\frac{c}{m}t}$

(1.58)式より

$= -g\cdot e^{-\frac{c}{m}t}$ $\quad (\because)\ \dfrac{cv}{mg} = e^{-\frac{c}{m}t} - 1$

$\longrightarrow e^{-\frac{c}{m}t} = \dfrac{c}{mg}v + 1$

$= -g\left\{\dfrac{c}{mg}v + 1\right\}$

$= -\dfrac{c}{m}v - g$

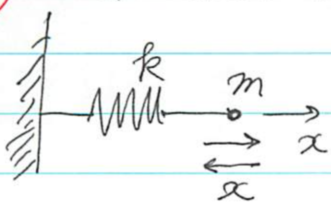
$\therefore m\dfrac{dv}{dt} = -mg - cv$

すなわち, 一般解(1.58)は微分方程式(1.58)を満たす。

Department of Physics
Faculty of Engineering
Kyushu Institute of Technology

§1.2.8 単振動(simple vibration)

または調和振動(harmonic vibration)　　(Hooke's force)(フックの力)



任意の時刻 t における力 $F(x)$ が $F(x) = -kx \ (k>0)$

と表わされる場合、この重り(質量 m)

つりあいの位置からの変位を x として、運動方程式は次のように書ける。

($x>0$: 伸び, $x<0$: 縮み)

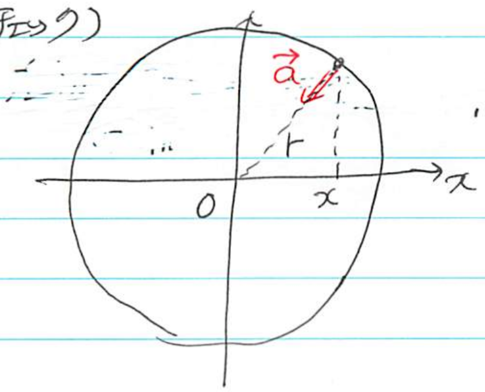
$$\boxed{m a_x = -kx}$$

ここで $\omega \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ となる 等速円運動と関係が強いこと(正射影の運動)

角速度 を示す.

等速円運動の加速度の大きさ $a = v\omega = r\omega^2$　　$v = r\omega$

(チェック)



∴ 第1(または4)象限では $x>0,\ a_x<0$

$$a_x = \ominus a\frac{x}{r} = -r\omega^2\frac{x}{r} = -\frac{k}{m}x. \qquad (\because)\ \omega^2 = \frac{k}{m}$$

第2(または3)象限では、$x<0,\ a_x>0$

$$a_x = -a\frac{x}{r} = -\frac{k}{m}x$$

全ての場合に

$a_x = -\dfrac{k}{m}x$ と書ける!

何故だろうか?!

47 バネ定数が 7.2 N/m, おもりの質量が 0.2 kg であるとすると, 単振動の周期 T はいくらになるか.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\fallingdotseq 2\times 3.14\times\sqrt{\frac{0.2\,\mathrm{kg}}{7.2\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}}}$$

$$\fallingdotseq 1\,\mathrm{s}$$

Department of Physics
Faculty of Engineering
Kyushu Institute of Technology

(p.24) $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ であるから，単振動の運動方程式は

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx} \qquad (1.60)$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \qquad (1.60')$$

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω：既知(の定数)　実数の

$x = x(t)$ という関数形が未知

t について2階

→ (1.60)または(1.60')を2階の微分方程式という

(解)
- 一般解 (a general solution)：(階数に応じた個数の)任意定数を含む解(の集合)
- 特殊解または特解 (a specific solution)：任意定数を初期条件($t=0$ の位置など)や境界条件で具体的に定めた解
- 特異解 (a singular solution)：一般解には含まれない解

48 $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ が式 (1.60) の解であることを確かめなさい．ただし $\omega = \sqrt{k/m}$ である．

(1.60),(1.60')の一般解のいくつかの表現

$x(t) = A\cdot\cos(\omega t) + B\cdot\sin(\omega t)$,　A, B：任意定数

$= A'\cdot(\omega t + \alpha)$　　A', α：任意定数

$= B'\sin(\omega t + \beta)$　　B', β　"

(∵) $\frac{d}{dt}\{A\cos(\omega t) + B\cdot\sin(\omega t)\}$

$= A\frac{d\cos(\omega t)}{dt} + B\cdot\frac{d}{dt}\sin(\omega t)$

$= -A\omega\cdot\sin(\omega t) + B\cdot\omega\cos(\omega t)$

$\frac{d^2}{dt^2}\{\cdots\}$

$= -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)$

$= -\omega^2\{A\cdot\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\}$

$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$　(O.K.)

Department of Physics
Faculty of Engineering
Kyushu Institute of Technology

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\cdot\sin(\omega t)$ の変形：単振動が等速円運動の正射影であることの説明

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left\{\cos(\omega t)\cdot\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + \sin(\omega t)\cdot\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\}$$

ここで

$$\cos\alpha \equiv \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ -\sin\alpha \equiv \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$ すなわち $\tan\alpha = -\frac{B}{A}$

とおくと

$$x(t) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t+\alpha)$$

A, Bは元々任意定数であるから，あらためて，$\sqrt{A^2+B^2} \equiv A'$ とおくと

$$x(t) = A'\cdot\cos(\omega t+\alpha)$$

半径A'，角速度ωの円運動の正射影である！

$\omega t+\alpha$ ：時刻tにおける位相(phase)
α ：初期位相(initial phase)
} 無次元量（ラジアンで表わすこと！）