§1.3.1 運動量
§1.3.2 エネルギー
§1.3.3 エネルギーの変化
§1.3.4 力と位置エネルギー 問と詳解例

P.25 **49** 速さ 10 m/s で直線上を動いている質量 3 kg の物体を 2 秒間で静止させるには，どれだけの力を加えればよいか.

(解) 運動量変化：$\Delta p = 0 - 3\,\mathrm{kg} \times 10\,\mathrm{m/s}$
$= -30\,\mathrm{kg\,m/s}$.

力積：$F \cdot \Delta t = F \times 2\mathrm{s}$

$\Delta p \fallingdotseq F \cdot \Delta t$ より

$$F = \frac{-30\,\mathrm{kg \cdot m/s}}{2\mathrm{s}} = -15\,\mathrm{kg \cdot m/s^2}$$

$= -15\,\mathrm{N}$. ：マイナス符号は運動とは逆向きであることを意味する。

P.25 **50** 質量 5 kg のボールが x 方向に 20 m/s の速さで飛んできた．このボールをバットで打ったところ，$-x$ 方向に 30 m/s の速さで飛んでいった．ボールの運動量の変化 Δp_x，ボールに加えられた力の力積 $F_x \Delta t$，ボールに加えられた平均の力 F_{av} を求めよ．ただし，ボールとバットが接触している時間を 0.01 秒としなさい.

(解) $\Delta p_x = m v_2 - m v_1 = m(v_2 - v_1)$ （$+x$ 方向を＋とする）
$= 5\,\mathrm{kg} \times (-30\,\mathrm{m/s} - 20\,\mathrm{m/s})$
$= -250\,\mathrm{kg \cdot m/s}$.

$F_x \cdot \Delta t = \Delta p_x$
$= -250\,\mathrm{N \cdot s}$

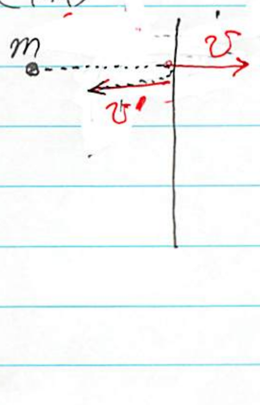
$$F_{av} \equiv \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-250\,\mathrm{N \cdot s}}{0.01\,\mathrm{s}}$$

$F_{av} = -25000\,\mathrm{N}$

（力が撃力の場合，平均の力は相当に大きくなること）

P.25 **51** 質量 0.02 kg の球が 5 m/s の速度で壁に垂直にぶつかり，やってきた方向へ 5 m/s の速度で跳ね返っていく．
(1) 衝突による球の運動量変化はいくらか.
(2) 一つの球の衝突により壁にはたらく力積はいくらか.
(3) 1 分間に 800 個の球が壁に衝突するとき，壁にはたらく力はいくらか.

(解)



(1) $\Delta p = m v' - m v = m(v' - v)$
$= 0.02\,\mathrm{kg} \times \{-5\,\mathrm{m/s} - 5$
$= -0.2\,\mathrm{kg \cdot m/s}$.

衝突の向きを正の向きとする.

(2) $F \cdot \Delta t = \Delta p$ より
$= -0.2\,\mathrm{N \times s}$ （球に働らく力積）

(3) $\Delta t' = 1$分$= 60\,\mathrm{s}$ のとき，$F \cdot \Delta t' = -0.2\,\mathrm{N} \times 800\,\mathrm{s}$
$\shortparallel$
$\Delta p' =$

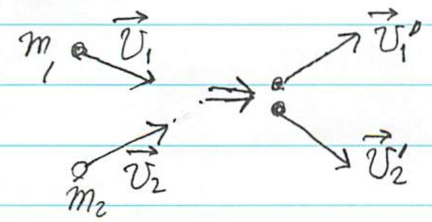
$$\boxed{F_{av} \equiv \frac{\Delta p'}{\Delta t}}$$

$$= \frac{-0.2\,\mathrm{N} \cdot 800\,\mathrm{s}}{60\,\mathrm{s}}$$

$\fallingdotseq -2.7\,\mathrm{N}$

P.26 **52** 質量 m_1, m_2 の二つの物体が衝突した．衝突前の速度の x 成分が v_{1x}, v_{2x}, y 成分が v_{1y}, v_{2y}, 衝突後の速度の x 成分が v'_{1x}, v'_{2x}, y 成分が v'_{1y}, v'_{2y} であった．これらの間に成り立つ式を書きなさい．

（解）衝突が短時間に起こると考えて，外力の影響は無視できるので，
運動量の保存則（ベクトルの関係）が成立する。
質量はそれぞれ保存するとして，x, y- 成分の式は次のようになる。



$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$ より

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} \end{cases}$$

P.26 **53** 質量 3 kg と質量 7 kg の物体が，それぞれ速さ 6 m/s と 1 m/s で直線上を同じ向きに進んで衝突した．衝突後二つの物体がくっついて動いていったとすると，この物体はどんな速さで進むか．

（解）今の場合，運動量保存則（衝突後一体となる速度を v_x' とすると）より

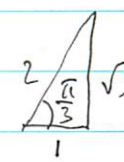
$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) v_x'$$

$$v_x' = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{3\,\mathrm{kg}\cdot 6\,\mathrm{m/s} + 7\,\mathrm{kg}\cdot 1\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{kg}}$$

$$= 2.5\,\mathrm{m/s}$$

P.26 **54** 滑らかな水平面上で，質量 1.0 kg の球 A が速さ 6.0 m/s で x 方向に直進してきて，静止していた質量 3.0 kg の球 B に当たり，球 A は x 方向と $+60°$ の方向に 12.0 m/s で動いた．衝突後の球 B の速度の x 成分，y 成分を v_x, v_y として，次の問に答えなさい．
(1) x 方向の運動量保存則を表す式を書きなさい．
(2) y 方向の運動量保存則を表す式を書きなさい．
(3) 球 B はどの方向にいくらの速さで動き出すか．



$\cos 60° =$

（解）：鉛直向きから見ると

(1) $m_A v_A = m_A \cdot v_A' \cdot \cos 60° + m_B \cdot v_x$

$\rightarrow 6\,\mathrm{kg\cdot m/s} = 12\,\mathrm{kg\cdot m/s} \times \cos 60° + 3\,\mathrm{kg} \times v_x$

(2) $0 = m_A v_A' \sin 60° + m_B \cdot v_y$

$\rightarrow 0 = \underbrace{12\,\mathrm{kg\cdot m/s}}_{\times \frac{\sqrt{3}}{2}} + 3\,\mathrm{kg}\cdot v_y$

(3) (1)の結果より，$v_x = 0$.
(2)の結果より，$v_y = -2\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$

よって
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$$
$$\fallingdotseq 3.5\,\mathrm{m/s}.$$

コメント：運動エネルギーの和の変化

$\Delta E_K = \left(\frac{1}{2} m_A \cdot v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v^2\right) - \frac{1}{2} m_A v_A^2 = 72\,\mathrm{J}$（増加）← 爆発などにより，（別のしくみで）エネルギーが発生

Date 2015.4.28-3

No.

P.27 **55** x 方向へ動いていた自動車がブレーキをかけて静止した．ブレーキによる力の大きさが 500 N であり，静止するまでに動いた距離が 4 m であったとして，ブレーキのした仕事を求めなさい (力の方向と物体の動いた方向が逆であることに注意し，物体 (自動車) のエネルギーが減っていることにも注意しなさい)．

(解) ブレーキの力を F，移動距離をΔxとすると，ブレーキのする仕事ΔWは

$$\Delta W = F\cdot\Delta x$$

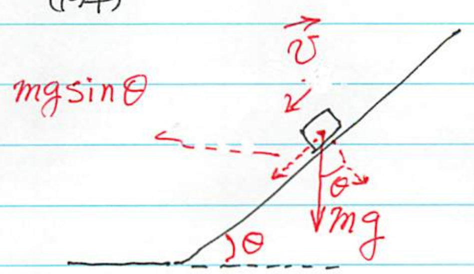
ブレーキの力の向きは進む向きと逆向きなので.

$$= -500\,\mathrm{N}\cdot 4\,\mathrm{m}$$

$$= -2000\,\mathrm{N}.$$

P.27 **56** 水平と 30° 傾いた斜面上を質量 1 kg の物体が斜面に沿って 1 m 滑り落ちた．物体と斜面との間に抵抗はなく，物体には鉛直方向 (水平と垂直方向) に 9.8 N の重力がはたらいていたとして，重力のした仕事を求めなさい．

(解)



(重力の　斜面に垂直な成分は仕事をしない.)

重力の斜面に平行な成分の大きさは $mg\cdot\cos\theta$ で

下向きだから，重力のする仕事ΔWは

$$\Delta W=(mg\cdot\sin\theta)\cdot\Delta x$$

$\theta=30°=\frac{\pi}{6} \rightarrow \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\Delta x=1\,\mathrm{m}$

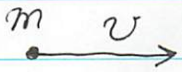
$$\fallingdotseq 4.9\,\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$$

$$\fallingdotseq 4.9\,\mathrm{J}$$

$(1\,\mathrm{J}=1\,\mathrm{N\cdot m})$

P.29 **57** 質量 500 kg の自動車が，速度 10 m/s で走っている．運動エネルギーを求めなさい．また，$\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{m/s})^2$ が $\mathrm{J}=\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$ と一致することを確かめなさい．

(解)



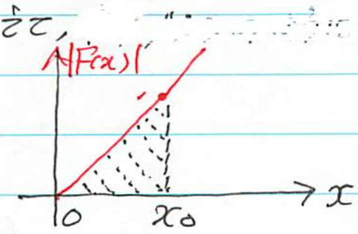
$$E_K=\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 500\,\mathrm{kg}\times(10\,\mathrm{m/s})^2$$

$$=25{,}000\,\mathrm{J}$$

P.29 **58** 力 $F_x=-kx$ がはたらいて，$x=x_0$ の点から $x=0$ の点まで移動したとき，力のする仕事を計算しなさい．

(解) $x_0>0$と考えると，伸びているバネが，バネの力により縮むので，正(+)の仕事と考えて，



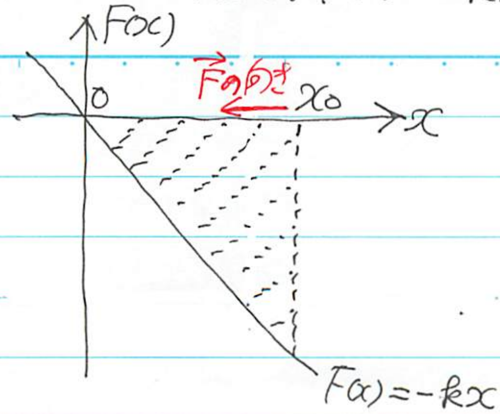
$$W=\frac{1}{2}\times kx_0\cdot x_0$$

$$=\frac{1}{2}kx_0^2$$

P.30

59 力 $F_x=-kx$ がはたらいて，$x=x_0$ の点から $x=0$ の点まで移動したとき，力のする仕事を積分を使って計算しなさい．

位置xにおける力 $F(x)=-kx$ であるから，グラフに描けば下図のようになる。



$$仕事\ W=\int_{x_0}^{0}F(x)dx$$

0 ← 終りの位置
x_0 ← 初めの位置

$$=-\int_{x_0}^{0}kx\,dx=-k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=x_0}^{x=0}$$

$$=+\frac{1}{2}kx_0^2$$

P.30 **60** 摩擦力の場合，この仮定(*)が成立しないことを確かめなさい．
［ヒント：摩擦力の場合，仕事は摩擦力と移動距離の積にマイナスをつけたものである.］

(*) その力がする仕事が終りの位置のみに依存し，途中の経路によらないこと。

(解) まさつ力の場合，その力のする仕事は経路に依存するので，この仮定は成立しない。
経路が長ければ長いほど，その行う仕事が大きくなるなど
(負の仕事)

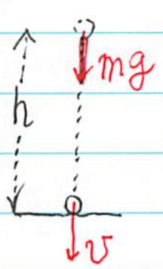
P.30

61 バネ定数が $k=0.1\,\mathrm{N/m}$ であるバネを $0.1\,\mathrm{m}$ だけ縮めたときの位置エネルギーはいくらか.

(解) (おもりの)つりあいからの変位 x (>0 または <0) における位置エネルギー $U(x)$ は
$U(x)=\frac{1}{2}kx^2$ で，今，$x=-0.1\mathrm{m}$ であるから

$$U(x=-0.1\mathrm{m})=5\times10^{-4}\,\mathrm{N\cdot m}=5\times10^{-4}\,\mathrm{J}$$

P.34 **62** 質量 $3\,\mathrm{kg}$ の物体が高さ $2.5\,\mathrm{m}$ のところから地面へ落下した．落下直前の速さを求めなさい．



力学的エネルギー保存則より
(重力は保存力なので)

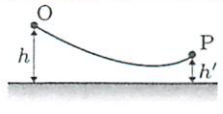
$$0+mgh=\frac{1}{2}mv^2+0$$

$\rightarrow v=\sqrt{2gh}$ ：質量mには依存しない！

$$=\sqrt{2\times9.8\mathrm{m/s^2}\times2.5\mathrm{m}}$$

$$\fallingdotseq 7\,\mathrm{m/s}$$

P.35 63 右図のような滑らかな斜面上の点Oに，質量 m の物体を置き，手を離した．点Oでの速度がゼロであった物体が点Pまで滑っていった．点Pでの速さを求めなさい．ただし，地面から点Oまでの高さは h，地面から点Pまでの高さは h' としなさい．



(解) 重力は保存力であるから，力学的エネルギー保存則より

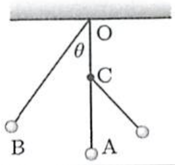
$$mgh + 0 = mgh' + \frac{1}{2}mv^2$$

これより $v = \sqrt{2g(h-h')}$ ：質量には依存しない。

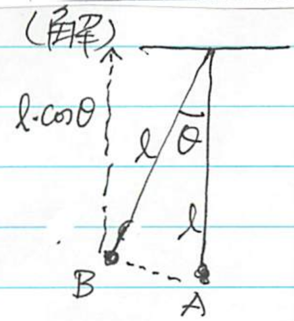
P.35 64 右図のように長さ 50 cm の糸の先に，0.5 kg の球をつけ，定点Oからつるす．球をBの位置に支え，そっと離した ($\cos\theta = 4/5$ としなさい)．

(1) 最下点での速さ v_A を求めなさい．

(2) 最下点に来たとき，糸OAの間の点Cを押さえると，球は右方でどれだけの高さまで上るか．Aからの高さで答えなさい．



(解)



(1) 力学的エネルギー保存則より，B点を位置エネルギーの基準として，

$$0 + mg(l - l\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_A^2 + 0$$

$$v = \sqrt{\ }$$

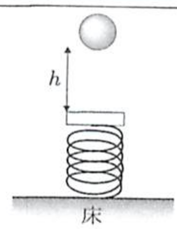
(2) 上昇する高さを h とすると，同様にして

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg\cdot h$$

$$\to h = \frac{v_A^2}{2g} = \frac{(1.4\,m/s)^2}{2\times 9.8\,m/s^2}$$ ：質量には依存しない。

$$= 0.1\,m$$

P.35 65 右図に示したように，上端に質量の無視できる薄い板をつけたつるまきバネを水平面上に置き，下端を床に固定した．質量 m の小球を，板の上方 h の点から落下させた．バネ定数を k として，小球がいちばん下に到達したときのバネの縮み x_{max} を求めなさい．



(解) バネの初め上端の位置を(重力の)位置エネルギーの基準点に選ぶ。

今，重力とバネの力がともに位置エネルギーをもつことに注意して，バネが x だけ縮むときの力学的エネルギーの保存を考える。

小球がいちばん下に到達するとき速さはゼロだから

$$0 + (mgh + 0) = 0 + \left(-mgx + \frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\to \frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh = 0$$

根と係数の関係より

$$x = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k}$$

$$\therefore x_{max} = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k}$$

$(x > 0)$

p.36

問66 重力の位置エネルギーの場合，$U(x,y+\Delta y,z)-U(x,y,z)=-F_y\Delta y$ が成り立つ．このことから，重力を求めなさい．

*

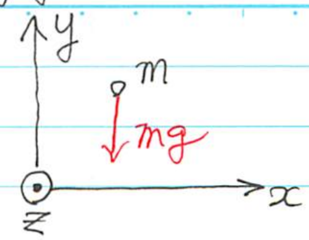
(解)

$$F_y=-\frac{U(x,y+\Delta y,z)-U(x,y,z)}{\Delta y}$$

$U_{(x,y,z)}=-mgy$

$$=-\frac{mg(y+\Delta y)-mgy}{\Delta y}$$

$$=-mg$$



p.36

問67 位置エネルギーが $U(x)=kx^2/2$ であるとき，力を求めなさい．

(解) $F(x)=-\dfrac{dU(x)}{dx}$ より

$$=-kx$$

p.36

問68 位置エネルギーが $U(r)=-GmM/r$ であるとき，力を求めなさい．ただし，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である．

**

(解)

$$F_x=-\frac{\partial U(r)}{\partial x}$$

$$=-\frac{dU(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

ここで

$$\frac{dU(r)}{dr}=+\frac{GmM}{r^2}.$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}-1}\times 2x$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

∴

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r} \quad (注意!!)$$

∴ $$\boxed{F_x=-G\underbrace{\frac{mM}{r^2}}_{大きさ}\underbrace{\frac{x}{r}}_{成分}}$$

↑ 引力

大きさ (成分 :)

同様に

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad F_y=-G\frac{mM}{r^2}\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r},\quad F_z=-G\frac{mM}{r^2}\frac{z}{r}.$$