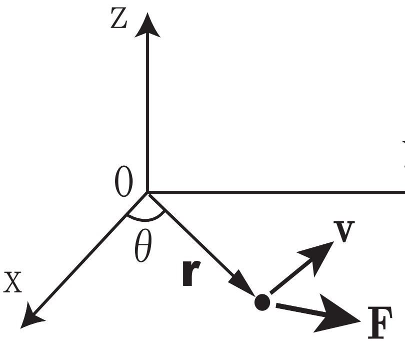
(２次元極座標における角運動量と力のモーメント)angular-mom-2dim-QA150530.TEX

粒子（質量 m）の運動と働く力が xy 面上に限られる場合に、次の問いに答えよ。

1. 平面座標 (r,θ) を用いて、この粒子の角運動量の z 成分 ℓ_z を計算せよ。
2. 力のモーメント（またはトルク）の z 成分 N_z の大きさは力の大きさ F と、原点から力のベクトルへおろした垂線の長さ p の積になることを示せ。



(解答例) 1. この粒子の x, y 座標は

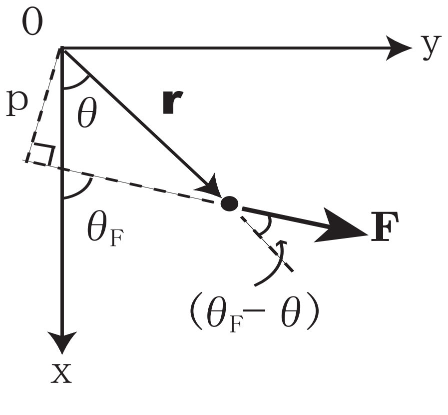
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, y = r\sin\theta, (r(t),\theta(t)), \\ \to v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta. \end{aligned}$$

角運動量 (ベクトル) の定義より

$$\vec{\ell} \equiv r\times m\vec{v}. \qquad (1)$$

今、$z=0, v_z=0$ より ℓ_x, ℓ_y=0 である。また角運動量の z 成分 ℓ_z は

$$\begin{aligned} \ell_z &= xmv_y - ymv_x \\ &= r\cos\theta\cdot m(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta) \\ &\quad -r\sin\theta\cdot m(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta), \\ \therefore\ \ell_z &= mr^2\frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$



2. 力のモーメント (ベクトル) の定義より

$$\vec{N} \equiv \vec{r}\times\vec{F}.$$

従って、z 成分 N_z は

$$N_z = xF_y - yF_x.$$

ここで力のベクトル F の x 軸となす角を θ_F とすると

$$\begin{aligned} N_z &= r\cos\theta\cdot(F\sin\theta_F) - r\sin\theta\cdot(F\cos\theta_F) \\ &= F\cdot r\sin(\theta_F-\theta) \\ &= F\cdot p \quad (p\equiv r\sin(\theta_F-\theta)) \end{aligned}$$

従って、N_z は力の大きさ F と、原点 O から力ベクトル F(の作用線) に下ろした垂線の長さ p の積になる。