粒子の回転運動-角運動量と力のモーメント

内容

§1.固定軸のまわりの粒子の円運動
§２. xy平面上の一般の回転運動
§３. 3次元空間内の粒子の回転運動
§４.ベクトルとその外積を使うと種々のことが容易に，計算、理解できる！

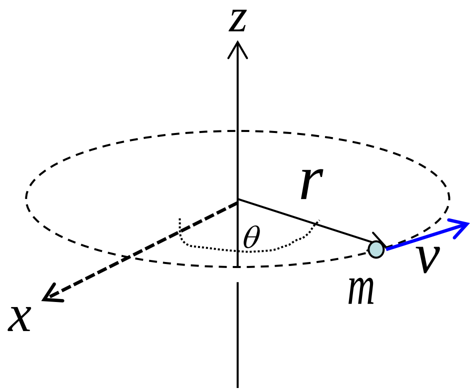
Made by R. Okamoto (Emeritus Prof., Kyushu Inst. of Tech.)
filename= angular-mom-torque-summary20150526B.ppt

§ 1. 固定軸のまわりの粒子の円運動

＜簡単のため、固定軸をz軸にする＞

・質量mの粒子がz軸の回りに半径rの等速円運動を行うことを考える。

・任意の時刻tにおける、粒子のx軸からの回転角をθ、円周方向の速さをvとする。



・固定軸まわりの回転運動とx軸上の並進運動の対応

X軸上のx軸上の並進運動

粒子の位置　x

速度　$v_x = \frac{dx}{dt}$

加速度　$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

運動量　$p_x = mv_x$

力　F_x

並進の運動方程式　$\frac{dp_x}{dt} = F_x$

固定軸まわりの回転運動

回転角　θ

角速度　$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

角加速度　$\beta = \frac{d\omega}{dt}$

円周方向速さv＝$r\omega$

角運動量　$\ell = rmv$

力のモーメント(トルク）$N=rF$

回転の運動方程式　$\frac{d\ell}{dt} = N$

角度の次元　無次元

角速度の次元 $[\omega] = \mathrm{s}^{-1}$

角加速度の次元　$[\beta] = \mathrm{s}^{-2}$

角運動量の次元

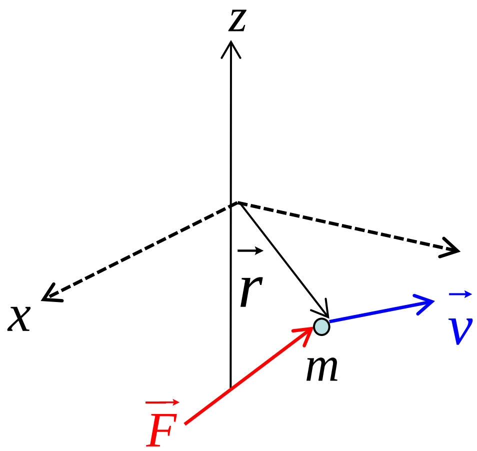
$[\ell] = \mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}$

力のモーメントの次元

$[N] = \mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}$

§ 2. xy平面上の一般の回転運動

・粒子の位置、速度，速さ、運動量，力



$$\vec{r} = (x, y) \cdots (2.1)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \cdots (2.2) \rightarrow v \equiv \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdots (2.2')$$

$$\vec{p} = (p_x, p_y) = (mv_x, mv_y) \cdots (2.3)$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y) \cdots (2.4) \rightarrow F \equiv \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \cdots (2.4')$$

・粒子の並進の運動方程式

$$\frac{md^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \rightleftarrows \begin{cases} \dfrac{d(mv_x)}{dt} = F_x \cdots (2.5) \\ \dfrac{d(mv_y)}{dt} = F_y \cdots (2.6) \end{cases}$$

・粒子の角運動量と力のモーメント(トルク)、回転の運動方程式

x・(2.6)－y・(2.5)より

$$x\frac{d(mv_y)}{dt} - y\frac{d(mv_x)}{dt} = x \cdot F_y - y \cdot F_x \cdots (2.7)$$

ところが

$$\frac{d(x \cdot mv_y - y \cdot mv_x)}{dt} = v_x mv_y - v_y mv_x + x\frac{d(mv_y)}{dt} - y\frac{d(mv_x)}{dt} = x\frac{d(mv_y)}{dt} - y\frac{d(mv_x)}{dt} \cdots (2.8)$$

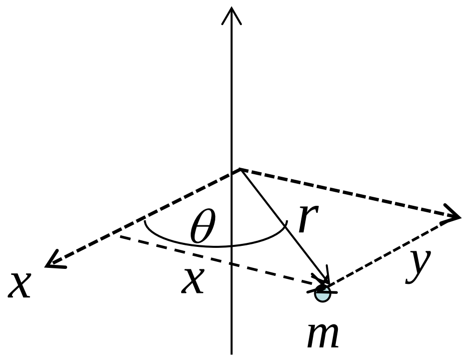
だから，次のように角運動量ℓ_z と力のモーメントNを定義する

$\ell_z \equiv x \cdot mv_y - y \cdot mv_x \cdots (2.9)$	角運動量：回転運動の勢い，
$N_z \equiv x \cdot F_y - y \cdot F_x \cdots (2.10)$	力のモーメント(またはトルク)：「回転力」

式(2.7)は次のように書ける(**粒子の回転の運動方程式**)

$\dfrac{d\ell_z}{dt} = N_z \cdots (2.11)$	角運動量の時間変化率は力のモーメント(またはトルク)と等しい；回転運動の状態は力のモーメントで変化する

直交座標から平面極座標に変換すると



$$x = r\cos\theta \cdots (2.12)$$

$$y = r\sin\theta \cdots (2.13)$$

$$\rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \cdots (2.14)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \cdots (2.15)$$

$$v_x = \frac{d}{dt}(r\cos\theta) = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta \cdots (2.16)$$

$$v_y = \frac{d}{dt}(r\sin\theta) = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta \cdots (2.17)$$

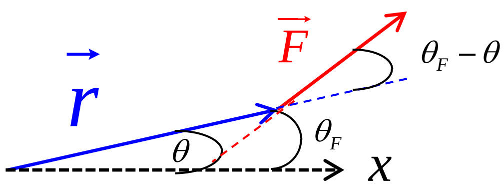
・角運動量のz成分の極座標表示

$$\ell_z = x\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\right) - y\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\ell_z = mr^2\frac{d\theta}{dt} = r\cdot(mr\omega)} \cdots (2.18)$$

←円運動だけではなく、一般の平面運動でも同じ表現式

・力のモーメント(トルク)のz成分の極座標表示

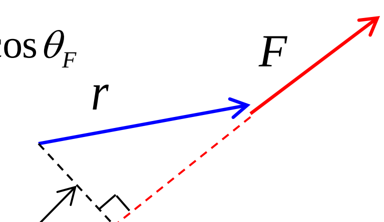


$$F_x = F\cos\theta_F, F_y = F\sin\theta_F \cdots (2.19)$$

$$\rightarrow N_z = r\cos\theta\cdot F\sin\theta_F - r\sin\theta\cdot F\cos\theta_F$$

$$\therefore \boxed{N_z = rF\sin(\theta_F - \theta)} \cdots (2.20)$$

$(\theta_F - \theta)$: $\vec{r}$と$\vec{F}$のなす角度



$r\sin(\theta_F - \theta)$: 力のモーメントの腕の長さ

§３．3次元空間内の粒子の回転運動

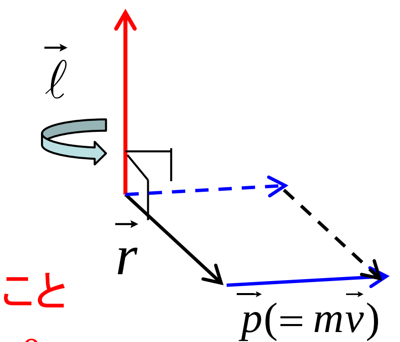
・粒子の位置、速度，速さ、運動量，力

$$\vec{r} = (x, y, z) \cdots (3.1)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \cdots (3.2) \rightarrow v \equiv \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdots (3.2')$$

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = (mv_x, mv_y, mv_z) \cdots (3.3)$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \cdots (3.4) \rightarrow F \equiv \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \cdots (3.4')$$



・粒子の角運動量ベクトル

$$\boxed{\vec{\ell} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}} \cdots (3.5)$$

×はベクトル積(外積)のこと

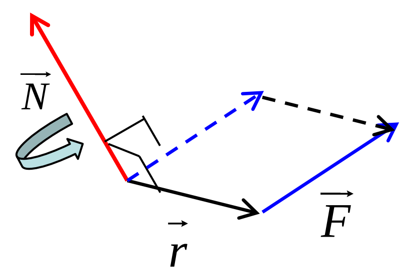
$$\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B}) \rightarrow \vec{A} \times \vec{A} = 0$$

$$\rightarrow \ell_x = m(yv_z - zv_y), \ell_y = m(zv_x - xv_z), \ell_z = m(xv_y - yv_x) \cdots (3.6)$$

・粒子に働く力のモーメント(トルク)ベクトル

$$\boxed{\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F}} \cdots (3.7)$$

$$\rightarrow N_x = yF_z - zF_y, N_y = zF_x - xF_z, N_z = xF_y - yF_x \cdots (3.8)$$



・粒子の(座標軸の原点Oのまわりの)回転の運動方程式

$$\boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{N}} \cdots (3.9)$$

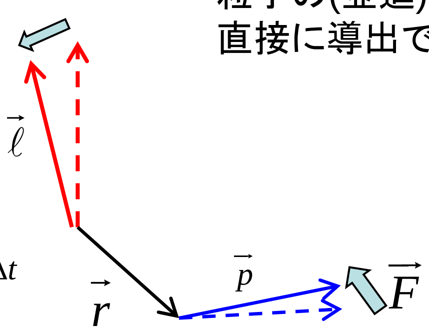
<---------------------粒子の(並進)運動方程式から直接に導出できる

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \rightarrow \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\rightarrow \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}, \left(\because \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0 \right)$$

微小変化で見る物理的な意味

$$\Delta\vec{\ell} \cong \left(\frac{d\vec{\ell}}{dt} \right) \Delta t = \left(\vec{r} \times \vec{F} \right) \Delta t$$



外力が作用するとそれと直角な向きに角運動量ベクトルが変化する

§4. ベクトルとその外積を使うと種々のことが容易に，計算、理解できる！

§4.1 中心力のモーメントはゼロで角運動量が保存されること

中心力の例：
重力、電気力

$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r},\ f(r)$：距離$r$のスカラー関数

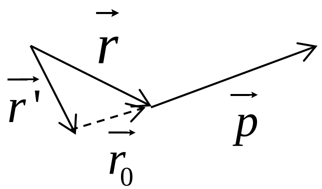
$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r},\ f(r)$：距離$r$のスカラー関数

$\to \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r} \times \vec{r} = 0$

$\to \vec{\ell}$の全ての成分、大きさと向きが保存される

例：惑星の面積速度は一定（ケプラーの第2法則）

§4.2 位置ベクトルまたは運動量ベクトルを平行移動しても角運動量ベクトルは同じ

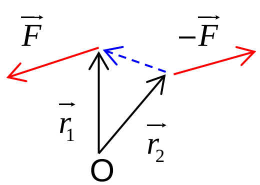


$\vec{\ell} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{\ell}\,' \equiv \vec{r}\,' \times \vec{p} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = \vec{\ell} - \vec{r}_0 \times \vec{p}$

$= \vec{\ell}$ （$\because \vec{r}_0$と$\vec{p}$は平行）

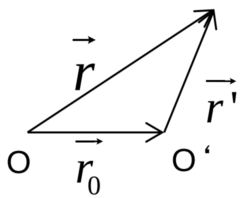
§4.3 反平行の1組の力(偶力）のモーメント



$$\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}$$

実例：竹とんぼを回すときの力のモーメント

§4.4 原点O以外のO’のまわりの角運動量、力のモーメント, 回転の運動方程式



$$\vec r = \vec r_0 + \vec r', \vec\ell \equiv \vec r \times (m\vec v), \vec\ell' \equiv \vec r' \times (m\vec v),$$

$$\vec N \equiv \vec r \times \vec F, \vec N' \equiv \vec r' \times \vec F, \frac{d(m\vec v)}{dt} = \vec F$$

$$\to \vec\ell' = \vec\ell - \vec r_0 \times (m\vec v), \vec N' = \vec N - \vec r_0 \times \vec F$$

従って、時間的に一定の修正原点O’のまわりの角運動量ベクトルと力のモーメントは元の原点Oのまわりの角運動量ベクトルと力のモーメントとは異なる。

$$\to \frac{d\vec\ell}{dt} = \vec N, \frac{d\vec\ell'}{dt} = \vec N'$$

$$\to \frac{d\vec\ell'}{dt} = \frac{d[(\vec r - \vec r_0)\times(m\vec v)]}{dt} = \frac{d\vec r}{dt}\times(m\vec v) + \vec N - \frac{d\vec r_0}{dt}\times(m\vec v) - \vec r_0 \times \frac{d(m\vec v)}{dt}$$

$$= \vec N - \frac{d\vec r_0}{dt}\times(m\vec v) - \vec r_0 \times \vec F$$

$$\therefore \frac{d\vec\ell'}{dt} = \vec N' - \frac{d\vec r_0}{dt}\times(m\vec v), \quad (\because \vec N = \vec N' + \vec r_0 \times \vec F)$$

しかし、時間的に一定の修正原点O’のまわりの回転の運動方程式は元の原点Oのまわりの回転の運動方程式と同じ。

逆に、時間的に変化する修正原点O’のまわりの回転の運動方程式は元の原点Oのまわりの回転の運動方程式と異なる。