

(次元解析による物理量の推定; filename=dimension-analysis1-qa20151007.tex)

鉛直面内における放物運動の最高高度を次元解析を用いて推定してみよう. 関係しそうな物理量は粒子の質量 m , 初めの速さ v_0 , 重力加速度の大きさ g と推定する. 一般に, 質量を M , 長さを L , 時間を T と記す. この粒子の最高高度 h を $h \approx m^\alpha v_0^\beta g^\gamma$ の形であると仮定して, この式の両辺の次元が一致するべきと考えて, α, β, γ の値を決めることにより, h の m, v_0, g についての関数形を推定せよ.

(解答例)

v_0, g のそれぞれの次元は以下の通りである.

$$[v_0] = LT^{-1}, [g] = LT^{-2}. \quad (1)$$

両辺の次元を比較すると

$$\begin{aligned} L^1 &= M^\alpha (LT^{-1})^\beta (LT^{-2})^\gamma \\ &= M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-\beta-2\gamma}. \end{aligned} \quad (2)$$

両辺の次元が一致するべきであるから

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ 1 &= \beta + \gamma, \\ 0 &= -\beta - 2\gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

すなわち, $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = -1$ と決まる. 従って, 最高高度 h の関数形は

$$h \propto \frac{v_0^2}{g} \quad (4)$$

であると推定される. ここで, 記号 \propto は, 一般に, $A \propto B$ が A は B に比例する, という意味である.

(備考: 正しい計算結果は $h = v_0^2/(2g)$ であるが, 次元解析による推定はその簡単さの割に, 実際的な場面で有効であることが多い.)