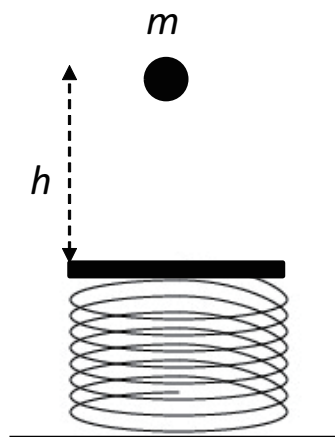


図に示すように、上端に質量の無視できる薄い板をつけた、バネを水平面上に（鉛直に）置き、下端を床に固定した。ここで、質量 m の小球を、板の鉛直上方 h の地点から落下させた。バネ定数を k として、小球が一番下に到達したときのバネの縮み x_{\max} を求めよ。ただし、重力加速度の大きさを g とする。



(ヒント)

題意より、鉛直方向の運動を考える場合、重りに働く力は重力とバネの弾性力（フックの力）であり、重力とフックの力はともに保存力であるから、重りの力学的エネルギーは保存される。この際、位置エネルギー（またはポテンシャル）は重力による位置エネルギーとバネの弾性力（フックの力）による位置エネルギーの和である。

(解答例)

(計算をできるだけ複雑にしないように) バネの初めの上端の位置を重力による位置エネルギーの基準点に選ぶ。

小球が初めの位置と一番下に落下した位置でも速さはゼロであることに注目して、それぞれの位置における力学的エネルギーを等しいと置くと

$$\begin{aligned} 0 + (mgh + 0) &= 0 + \left(-mgx + \frac{1}{2}kx^2\right) \\ \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

となる。これは2次方程式であるから、根と係数の関係式より

$$x = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k} \quad (2)$$

である。ここで、 $x > 0$ であるから

$$x_{\max} = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2ghkm}}{k} \quad (3)$$

が得られる。