運動方程式
ー微分方程式としての運動法則ー

目次

Made by R. Okamoto (Emeritus prof. of Kyushu Inst. of Tech.)
File name=eq-of-motion-as-diff-eq140501.ppt

1．微分方程式とは何か

未知の関数の微分係数を含む方程式

微分方程式の解法=積分すること

1回積分するごとに未定の積分定数が現れる

微分方程式＝必然性(法則）、可能性の集合

積分定数を具体的に決めるための

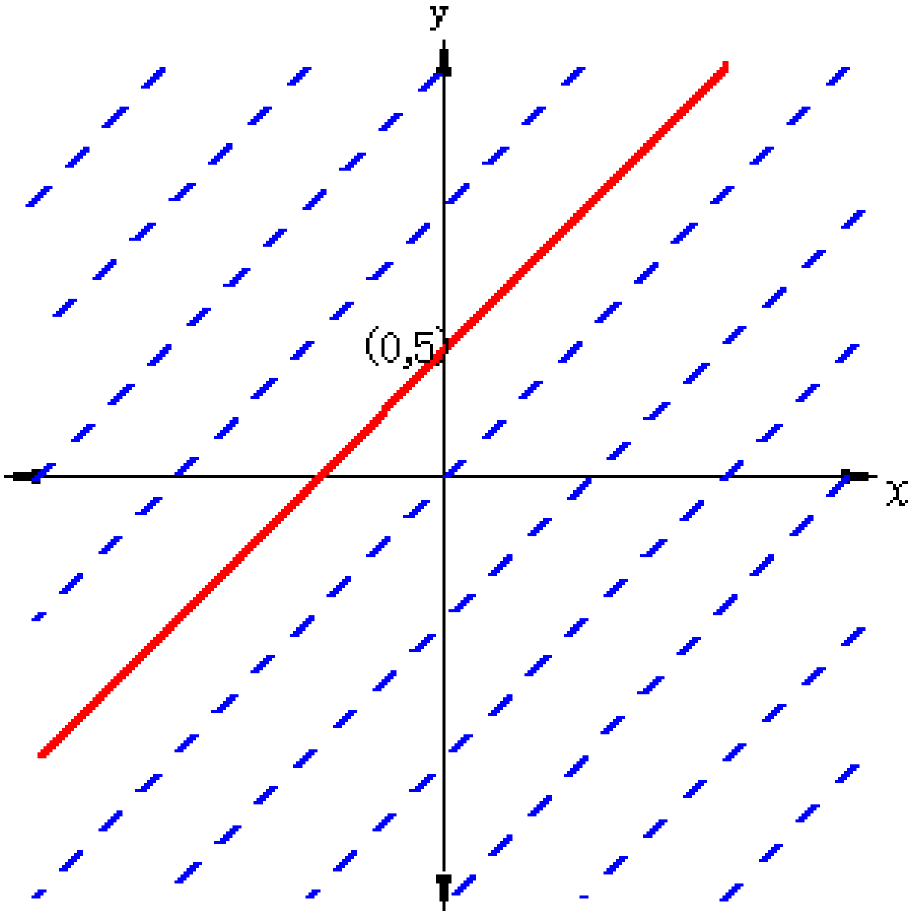
境界条件・初期条件

現実化(現象化）

力学的運動の「複雑さ」の一部は
初期条件・境界条件の多様性に置き換えられた

2.

微分方程式の一般解と特殊解 それらの意味



あらゆる点において
傾き1のグラフを決める
微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=1$$

一般解

$y=x+C$

C:積分定数

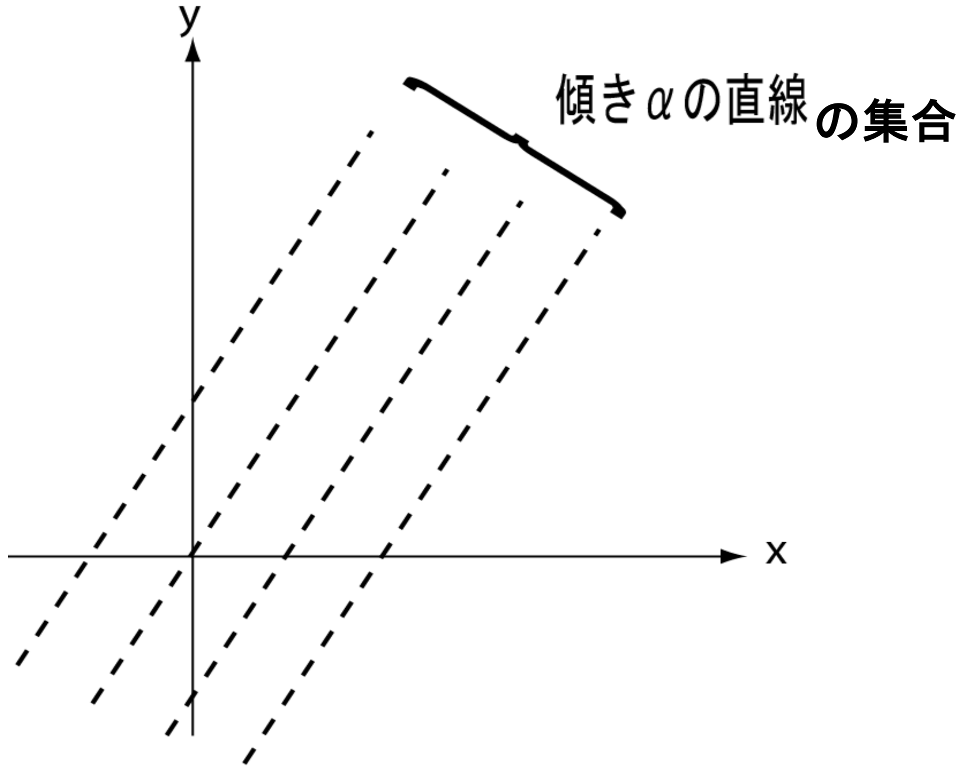
点(0,5)を通過するという
境界条件を満たす**特殊解**

$y=x+5$

ある可能性の集合全体を特徴づける関係式としての微分方程式

3. 傾きαをもつ直線の集合を表す微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\,(\text{一定値}) \Leftrightarrow \quad y = \alpha x + c\,(c:\text{積分定数})$$



4. 円の集合を表す微分方程式

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r:\text{一定の半径})$$

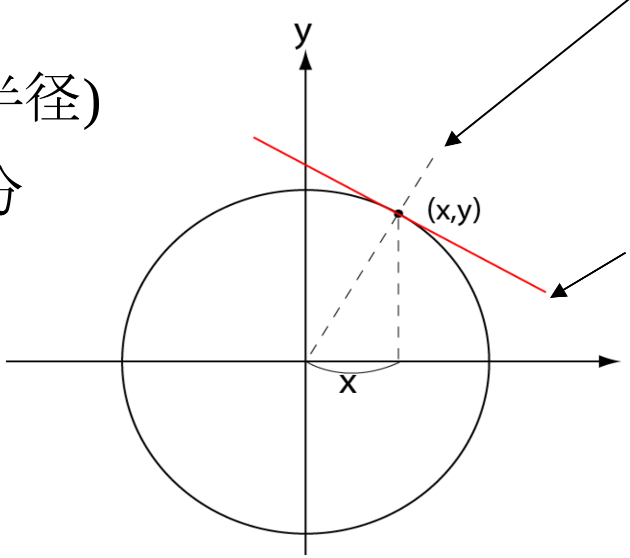
$$\Downarrow \qquad x\text{で両辺を微分}$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

傾き$\dfrac{y}{x}$の直線

直交



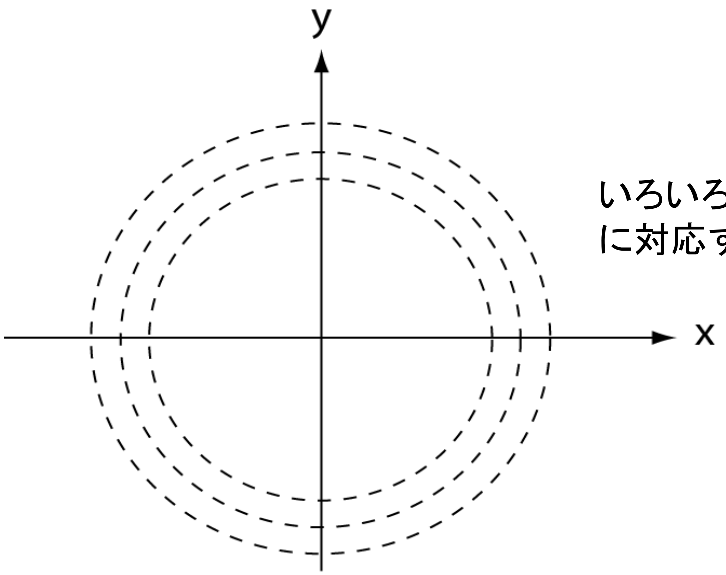
円周上の点(x、y)における接線の傾き$\left(-\dfrac{x}{y}\right)$

$$\rightarrow ydy = -xdx \rightarrow xdx + ydy = 0$$

$$\rightarrow \int xdx + \int ydy = \text{一定値} \equiv c^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{2}c)^2 = r^2$$



いろいろなcまたはrの値に対応する同心円の集合

５．楕円の集合を表す微分方程式は？

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a \neq b: \text{一定})$$

$$\Downarrow \qquad x\text{で両辺を微分}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\times\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

６．変数分離形の微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

$(v(t)$: 未知関数、$k > 0$: 一定）

$$\to \frac{dv}{v} = -kdt \to \int \frac{dv}{v} = (-)\int kdt$$ (積分は和である !)

$$\to \log_e |v| + c_1 = -kt + c_2$$ $(c_1, c_2$: 積分定数)

$$\to v = \pm e^{c'} \cdot e^{-kt} \to v = c \cdot e^{-kt} \quad (c' \equiv c_2 - c_1, c \equiv \pm e^{c'})$$

一般解(general solution)

初期条件：$t = 0$のとき, $v \equiv v_0$(一定値)とすると

（注意 : 初期条件は微分方程式とは独立である）

$$v(t) = v_0\, e^{-kt}$$

＊

公式　$\int \frac{1}{x} dx = \log_e |x| + C$ $(C$: 積分定数)

特殊解(specific solution)

(微分方程式の種類により、一般解の中に含まれない解（特異解）を含む場合あり。)

7.微分方程式としての運動方程式

$$ma(t) = F(x, v; t)$$

（ここでは1次元の場合を考える）

$$\rightleftarrows m\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(x, v; t)$$

質量x加速度＝外力

1）外力Fの関数形は問題ごとに与えられるが、時間tの関数としての位置、速度の関数形が未知である

2）力は、粒子の位置、速度、時間に依存しない一定の場合もあるが、位置や速度、時間に依存して変化する場合もある！

$$m\frac{dv}{dt} = F \leftarrow v = v(t),\ F = F(x, v; t) \quad \text{at any } (x, t)$$

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = F \leftarrow x = x(t),\ F = F(x, dx/dt; t) \quad \text{at any } (x, t)$$

未知の関数としての位置や速度の微分係数を含む方程式
＝微分方程式

8.力が一定の場合

実例:地表付近における重力

一般には、重力は粒子(物体)間の
相対距離に依存して変化する！

$$F = \text{constant value} \equiv F_0$$

$$\to m\frac{d^2x}{dt^2} = F_0 \to \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_0}{m}$$

$$\to \frac{dx}{dt} = \left(\frac{F_0}{m}\right)t + v_0 \ (v_0 : \text{積分定数})$$

$$\to x = \frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{m}\right)t^2 + v_0 t + c \ (c : \text{積分定数})$$

9.力が速度の1,2乗に比例する場合

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kv$$

$$\rightarrow m\frac{dv}{dt} = -kv \quad (v \equiv \frac{dx}{dt})$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = -\gamma v \quad (\gamma \equiv \frac{k}{m})$$

実例:微粒子がゆっくりと流体中を
移動する場合の粘性抵抗力
(ストークスの[経験的]法則)

変数分離型の微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta v^2$$

$$\rightarrow m\frac{dv}{dt} = -\beta v^2$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = -\delta v^2 \quad (\delta \equiv \frac{\beta}{m})$$

実例:物体が高速で流体中を
移動する場合の慣性抵抗力
(ニュートンの[経験的]法則)

変数分離型の微分方程式

10.フックの力の場合（粒子の釣り合いから変位に比例する復元力）

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

変数分離型の微分方程式

一般解

$$x(t) = A\sin(\omega t + \theta_0), \quad A, \theta_0 : \text{積分定数}$$

$$\text{or} \quad x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

解を元の微分方程式に代入すると、満足することがすぐわかる。（必要条件）
逆に、微分方程式の両辺に速度vをかけて、積分し、平方根をとり、ある
積分公式を用いると、一般解の関数形が直接に得られることも示すことができる！
（十分条件）