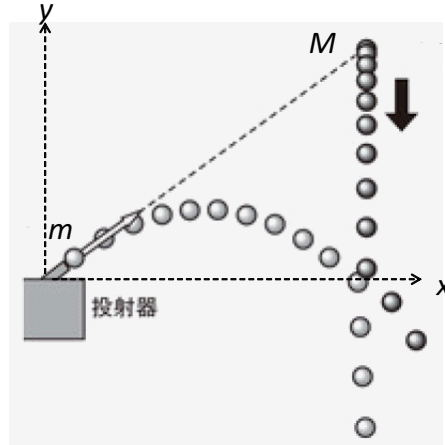


(ある粒子を別の粒子で狙い打つこと) filename=particle-shooting-QA20151126B.tex

図のように、粒子1を斜め上方に置いてある粒子2を狙って投げ出すと同時に、粒子2が自由落下する場合、2つの粒子が当たるかどうか、次の手順で考える。ただし、空気抵抗を無視し、重力の加速度の大きさ g とする。粒子1の質量を m 、(任意の時刻 t における) 加速度ベクトルの x, y 成分をそれぞれ a_x, a_y とし、粒子2の質量を M 、(任意の時刻 t における) 加速度ベクトルの x, y 成分をそれぞれ A_x, A_y として



1. 2粒子の運動方程式を記し、加速度ベクトルの x, y 成分を求めよ。
2. 初めの時刻において、粒子1を速さ v_0 、粒子2を見上げる角度 θ で投げ上げるとして、任意の時刻 t における2つの粒子のそれぞれの速度成分を求めよ。
3. 初めの時刻における粒子1と2の位置ベクトルの成分を初期条件として、任意の時刻 t における2つの粒子のそれぞれの位置ベクトルの成分を求めよ。
4. 2つの粒子の位置ベクトルの x 成分が等しくなる時刻 T を求めよ。
5. 前問で求まる時刻 T における2つの粒子の位置ベクトルの y 成分の値が等しくなるかどうかを調べ、2つの粒子が衝突するかどうかを判定せよ。

(ヒント)

2つの粒子に働く外力は鉛直下向きの重力のみであり、運動方程式はそれぞれの粒子ごとに、各成分ごとに考える。

(解答例)

1. 粒子1と粒子2それぞれの運動方程式の x, y 成分は次のように書ける：

$$ma_x = 0, \quad (1)$$

$$ma_y = -mg, \quad (2)$$

$$MA_x = 0, \quad (3)$$

$$MA_y = -Mg. \quad (4)$$

これらの式より

$$a_x = 0, a_y = -g, A_x = 0, A_y = -g \quad (5)$$

が得られる.

2. 速度成分ごとの初期条件

$$v_x(0) = v_0 \cos \theta, \quad (6)$$

$$v_y(0) = v_0 \sin \theta, \quad (7)$$

$$V_x(0) = 0, \quad (8)$$

$$V_y(0) = 0 \quad (9)$$

を考慮して、加速度の式を時間 t について積分すると

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta, \quad (10)$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin \theta, \quad (11)$$

$$V_x(t) = 0, \quad (12)$$

$$V_y(t) = -gt \quad (13)$$

が得られる.

3. 同様に、位置ベクトルの成分ごとの初期条件

$$x(0) = 0, \quad (14)$$

$$y(0) = 0, \quad (15)$$

$$X(0) = \ell, \quad (16)$$

$$Y(0) = \ell \tan \theta \quad (17)$$

を考慮して、速度の式 (?) を時間 t について積分すると、任意の時刻 t における、2つの粒子の位置ベクトルの x, y 成分が次のように求まる.

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t, \quad (18)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t, \quad (19)$$

$$X(t) = \ell, \quad (20)$$

$$Y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \ell \tan \theta. \quad (21)$$

が得られる.

4. 粒子1と粒子2のそれぞれの x 座標が一致する時刻を T とすると

$$\begin{aligned}x(T) &= X(T) \rightarrow (v_0 \cos \theta)T = \ell \\ \rightarrow T &= \frac{\ell}{v_0 \cos \theta}\end{aligned}\quad (22)$$

となる. この時刻 T における粒子1の y 座標を計算すると

$$\begin{aligned}y(T) &= -\frac{1}{2}gT^2 + (v_0 \sin \theta)T \\ &= -\frac{1}{2}gT^2 + \ell \tan \theta\end{aligned}\quad (23)$$

となり, 粒子2の y 座標の値 $Y(T)$ と一致する. すなわち, 題意の条件の下では, 初めの速さ v_0 の大きさに拘わらず, 粒子1は粒子2に必ず衝突する.

備考: この問題ではまっすぐ落ちる粒子2と, 斜めに打ち上げられた粒子1の運動について, そこに潜む普遍的な法則を知ってもらうことを意図している. この問題で重要な点は次の3点に集約される.

1. 2つの粒子が同時に運動を始めること.
2. 下の粒子が上の粒子をまっすぐ狙って発射されること.
3. 下の粒子をどのような速度で打ち出しても, 必ず粒子同士が衝突すること.

この問題の力学的な意味を探るために, 仮説を立てて考えてみる.

- (a) 仮に, 重力がない所でこの実験を行ったらどうなるか. 上の粒子は, 実験が始まっても押し出されたりするわけでないので, 最初の位置に止まったままです. 重力がないので下に落ちたりしない. 下の粒子1は上の粒子2に狙いをつけて発射されますから, そのまま真っ直ぐ飛んで行って, 止まっているボールに衝突する.
- (b) それでは, 重力があるときに2つの粒子はどのような運動をするか. 上の粒子2は重力に引かれて落ちていく. 下の粒子1は斜めに打ち上げられるが, やはり重力に引かれるので, 真っ直ぐ飛ぶことはできない. 粒子1を投げたときに誰もが経験するように, 山なりのカーブを描いて落ちていく. このとき, 上の粒子2にも下の粒子1にも重力は等しくかかっている. つまり落ちる距離は上の粒子2も下の粒子1も等しいということになる. ただ, 上の粒子2はただ落ちるだけ (自由落下という). 下の粒子は打ち上げられて徐々に落ちていく (放物線を描くという) ので, 落ちる距離が同じであるようには見えない. しかし, 重力がなければその場所にいたと想定される場所から, 重力によって落下した距離はどちらも同じになる. 下の粒子1を考えると, 重力がなければ, 上の粒子2が最初にいた位置に到達するはずだが, 重力が

あるため下の方に到達することになる。この時、重力によって下に落ちた距離は、上の粒子2が自由落下で落ちた距離に等しくなる。重力がなければ、上の粒子2が最初にいた位置で衝突するものが、重力があることで上の粒子2の自由落下した地点で2つの粒子が出会うことになるのである。これが、この問題で2つの粒子が必ず衝突する理由である。

このように物体の運動は、物体が受けている力をもとに計算することができる。宇宙空間にロケットで打ち上げられた探査機は太陽や惑星などから受ける重力やエンジンの出力などから計算を行うことで目的の天体に達することができる。参考情報:名古屋市科学館ホームページのモンキー・ハンティング http://www.ncsm.city.nagoya.jp/cgi-bin/visit/exhibition_guide/exhibit.cgi?id=S417&key=%E3%81%BB&keyword=%E6%94%BE%E7%89%A9%E9%81%8B%E5%8B%95

もちろん、空気抵抗があれば、上述の説明はそのままでは正しくない。なぜならば、空気抵抗は物体の速さの1乗または2乗に比例するので、2つの粒子の鉛直方向の加速度成分が同じではなくなるため。