（位置と速度-放物運動; filename=position-velocity-acceleration-vibration-QA20151121.tex）

一次元における物体（または粒子）の運動について，次の問いに答えよ．

1. 時刻 t における位置 $x(t)$ が $x(t) = A\cos(\omega t)$ であるとき，速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求め, この運動の特徴を述べよ．ただし，A, ω は適当な次元を持つ定数である．
2. 時刻 t における加速度 $a(t)$ が $a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)$ であるとき，速度 $v(t)$ を求めよ．ただし，時刻 0 における速度は $v(0) = 0$ であり，A, ω は適当な次元を持つ定数である．
3. 時刻 t における速度 $v(t)$ が $v(t) = -A\omega\sin(\omega t)$ であるとき，位置 $x(t)$ を求めよ．ただし，時刻 0 における位置は $x(0) = 0$ であり，A, ω は適当な次元を持つ定数である．

（解答例）

1. 題意より，速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ は，合成関数の微分公式を用いて

$$\begin{aligned} v(t) &\equiv \frac{dx}{dt} = A\frac{d\cos u}{du}\cdot\frac{du}{dt},\ u \equiv \omega t, \\ &= -A\omega\sin(\omega t), \\ a(t) &\equiv \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega\frac{\sin u}{du}\frac{du}{dt}, \\ &= -A\omega^2\cos(\omega t), \\ &= -\omega^2 x(t) \end{aligned} \tag{1}$$

と得られ，これは加速度がその位置座標に比例し，逆向きになる運動である.（または，両辺に物体 (粒子) の質量 m をかけて，運動法則と見なせば，力が物体 (粒子) の位置座標に比例し，逆向きに働く力 (フックの力）に従う運動である．)

2. 題意より，速度と加速度の不定積分による関係より，積分定数（または任意定数）を C と書くと

$$v(t) = \int a(t)dt = -\ A\omega^2\int\cos(\omega t)dt = -A\omega\sin(\omega t) + C \tag{2}$$

となる．与えられた初期条件 $v(0) = 0$ より，$C = 0$ となるので，$v(t) = -A\omega\sin(\omega t)$ が得られる．

3. 前問と同様に

$$x(t) = \int v(t)dt = -A\omega\int\sin(\omega t)dt = A\cos(\omega t) + C \tag{3}$$

となる．与えられた初期条件 $x(0) = 0$ より，$C = -A$ となるので，$x(t) = A\cos(\omega t) - A$ が得られる．