(空気中の速度比例抵抗力と重力による運動における終端速度)filename=resistence-in-air-terminal-velocity-QA20151130A.tex

空気など流体中を落下する物体 (粒子) の速度は最終的に一定の値に近づき，この速度を終速度 (または終端速度）という．次の問いに答えよ．

1. 速度 v のときの抵抗力の大きさが Cv(C は正定数)，物体の質量が m, 重力加速度の大きさが g であるとき，鉛直上向きを速度の正の向きに選び，時刻を表す変数を t として運動方程式を記せ.
2. 終速度 v_∞ を求めよ。（v_∞ を与えられた文字を用いて表せ。）
3. 前問の結果である運動方程式の，初速度 $v(t=0)=0$ の場合の解（特殊解）は
$$v(t) = \frac{mg}{C}\left(\mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t}-1\right) \tag{1}$$
であることを示せ。

(ヒント) 重力の向きは鉛直下向きであるが，その符号は選んだ座標軸の向きにより決まる．しかし，抵抗力は必ず速度の向きと逆向きであること．(解答例)

1. この粒子に働く外力は鉛直下向きの重力と速度に比例し，その逆向きに働く抵抗力の 2 つがあるから，運動方程式は次にようにと書ける：
$$m\frac{dv}{dt} = -mg - Cv \tag{2}$$
2. 定義により，終速度になると加速度ゼロになる. 式 (1) において，加速度ゼロとおいて
$$\begin{aligned} 0 &= -mg - Cv_\infty \\ \rightarrow v_\infty &= -\frac{mg}{C} \end{aligned} \tag{3}$$
となる．(結果の負符号は速度が鉛直下向きであることを示す．)
3. まず，式 (1) において，$t=0$ とおくと，初期条件 $v(0)=0$ を満たす.
次に，式 (1) の両辺を時間 t で微分すると
$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{mg}{C}\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t}-1\right) = \frac{mg}{C}\left(-\frac{C}{m}\right)\mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t} \\ &= -g\mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t} \end{aligned} \tag{4}$$
と書ける．ここで，指数関数部分を式 (1) から求めると
$$\frac{Cv}{mg} = \mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t} - 1 \rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{C}{m}t} = \frac{Cv}{mg} + 1 \tag{5}$$

となるので，これを式 (4) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g\left(\frac{Cv}{mg}+1\right) = -\frac{C}{m}v - g \\ \to m\frac{dv}{dt} &= -Cv - mg \end{aligned} \tag{6}$$

となり，式 (2) が得られる．すなわち，式 (1) は元の運動方程式 (2) を満たす解であることが示された．