速度と加速度(1)の数学的準備

目 次

Filename=velocity-accel-1dim-prepare20151013B.ppt

§ 1.導関数または微分係数：定義，意味，応用
変数xの関数$f(x)$をxで微分すること

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\equiv f'(x)$$

導関数（derivative）
微分係数（differential coefficient）

微分の公式

$$C:\text{定数} \quad \to \frac{dC}{dx} = 0,$$

$$C, n:\text{定数} \to \frac{d(Cx^n)}{dx} = nCx^{n-1},$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x,$$

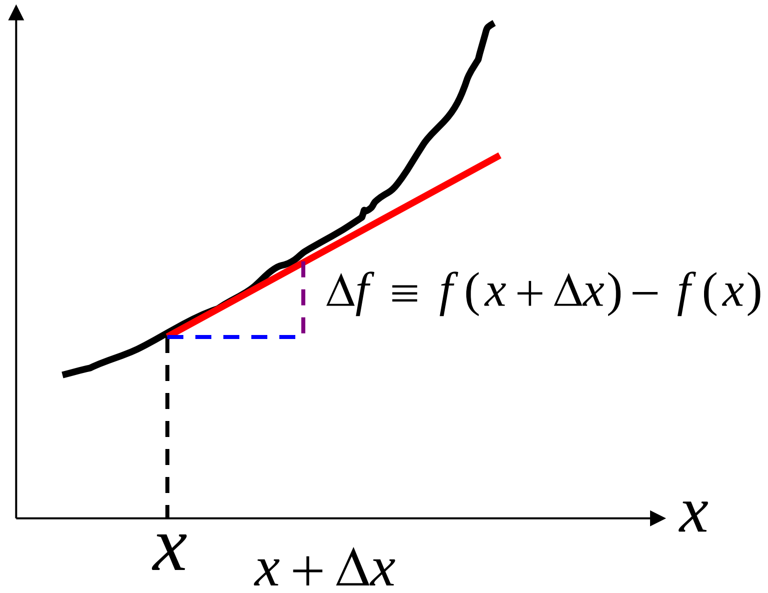
$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x,$$

$$\frac{d(\mathrm{e}^x)}{dx} = \mathrm{e}^x,$$

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}, (\ln x \equiv \log_{\mathrm{e}} x)$$

微分係数（導関数）のグラフ的な意味

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



ある点におけるグラフの傾き

<u>局所的変化率としての微分係数</u>

関数の増分と微分

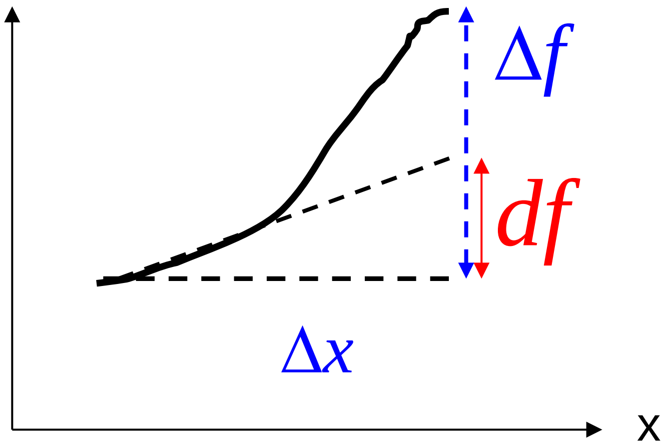
関数の微分:関数の増分の主要な部分

$$df \equiv \left(\frac{df}{dx}\right)\Delta x$$

$$\rightarrow f(x) = x\text{の場合}\ ;\ dx = \left(\frac{dx}{dx}\right)\Delta x$$

$$\rightarrow \boxed{dx = \Delta x}$$

変数の増分＝変数の微分



$$\boxed{df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx} \rightarrow \boxed{\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{df}{dx}}$$ 微分商としての微分係数

ライプニッツの記号df/dxは

（1）導関数であること、

（2）二つの微分の割り算(商）

という二つの意味をもつ！

＊微分(differential)の公式

$c:$定数

$(1)\ dc = 0$

$(2)\ d(cf) = cdf$

$(3) d(fg) = fdg + gdf$

$$(4) d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

例題：$f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

$\rightarrow df = (3x^2 - 6x + 2)dx$

微分の応用例

単振り子の周期Tは、ひもの長さL,重力加速度gとすると

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ひもの長さが約2%変化したとき、周期Tの変化率の大きさの推定.

解

周期Tをひもの長さLの関数とみなして、周期の変化ΔTをTの微分で近似する。

$$dT \cong \Delta T = \left(\frac{dT}{dL}\right)dL = 2\pi \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Lg}}dL = \frac{1}{2}T\frac{dL}{L}$$

$$dL = 0.02L \rightarrow dT \cong \frac{1}{2}T \times 0.02$$

$$\rightarrow \frac{dT}{T} \cong 0.01$$

周期はほぼ1%変化する

備考:このような解析は実験誤差の推定などにも応用できる.

合成関数の微分

変数tの関数 $u(x)$　　「変数」u(x)の関数 $f(u)$

$$\frac{df(u(x))}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u(x+\Delta x)) - f(u(x))}{\Delta x}, \quad u(x+\Delta x) \equiv u(x) + \Delta u$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$\therefore \boxed{\frac{df(u(x))}{dx} = \left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)}$$

公式の導出

ω, C:定数とする.

$$\frac{d[\cos(\omega x)]}{dx} = \frac{d\cos u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\omega\sin(\omega x), \text{（}u = \omega x\text{と置き換えた）}$$

$$\frac{d[\sin(\omega x)]}{dx} = \frac{d\sin u}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \omega\cos(\omega x)$$

$$\frac{d(\mathrm{e}^{Cx})}{dx} = \frac{d\mathrm{e}^{u}}{du} \cdot \frac{du}{dx} = C\mathrm{e}^{Cx}, \text{（}u = Cx\text{と置き換えた）}$$

＊助変数（パラメタ）の微分係数

ある変数 t の二つの関数 $f(t)$, $g(t)$が与えられているとする。

$$\boxed{\left(\frac{dg}{df}\right)=\frac{g'(t)}{f'(t)}}$$

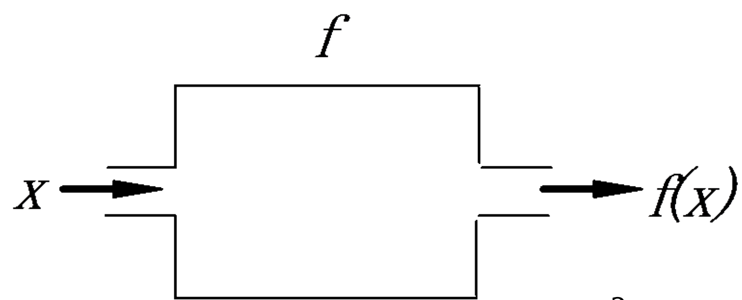
$$\because \left(\frac{dg}{df}\right)=\frac{dg}{df}=\frac{dg}{dt}\frac{dt}{df}=\frac{\left(\dfrac{dg}{dt}\right)}{\left(\dfrac{df}{dt}\right)}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

§2.関数とは何だろうか

ある量（変数）を入力したときに、与えられたやり方・規則で別の量を対応させる機能をもつ関係を関数という。

例1：　$f(x) = 2x^2 + x$　　Xという変数（量）に対して、

$2x^2 + x$　　という値（量）を対応させること、またはその機能を意味する。



$f(y) = 2y^2 + y$　　$f(z) = 2z^2 + z$　　とも表現できる。

さらに次のように表現することもできるだろう。 $f(\quad) = 2(\quad)^2 + (\quad)$

すなわち、関数とは（　　）に何らかの量が“入力”されると

$f(\ )$　という値を“出力”する（作る・計算する）という機能を表わすのである。

例２：　$f(x) = ax^2 + bx, (a, b : 一定)$

この例のように関数形として、明示的には与えられていないが、変数には関係のない定数（ a, b ）が含まれる場合もある。もちろん、この場合にも例１と同様に

$$f(y) = ay^2 + by$$

とも表すことができる。さらに、次のように表してもよい。

$$f(z) = az^2 + bz$$

さらに次のように表現することもできるだろう。

$$f(\quad) = a(\quad)^2 + b(\quad)$$

関数の本質はその機能（function）にある！

したがって，微分法の概念とその方法･公式は任意の変数とその関数について適用できる！！

変数として，xだけではなく，yについても，zについても，t についてもそれぞれの関数の微分を考えることができる．

§3.変数tの関数$f(t)$を tで微分すること

Xの関数f(x)を微分するように，同じ定義，同じ意味，同じ公式，同じ応用ができる！

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

公式

$C:$定数 $\rightarrow \dfrac{dC}{dx} = 0,$

$C, n:$定数 $\rightarrow \dfrac{d(Ct^n)}{dt} = nCt^{n-1},$

$$\frac{d(\cos t)}{dt} = -\sin t,$$

$$\frac{d(\sin t)}{dt} = \cos t,$$

$$\frac{d(\mathrm{e}^t)}{dt} = \mathrm{e}^t,$$

$$\frac{d(\ln t)}{dt} = \frac{1}{t}, (\ln t \equiv \log_{\mathrm{e}} t)$$

$C, \omega:$定数

$$\rightarrow \frac{d[\cos(\omega t)]}{dt} = -\omega \sin(\omega t),$$

$$\rightarrow \frac{d[\sin(\omega t)]}{dt} = \omega \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \frac{d(\mathrm{e}^{Ct})}{dt} = C\mathrm{e}^{Ct},$$