

# 速度と加速度(1)－1次元の場合

## 目次

- § 0. 背景, 要点, 背後の思想
- § 1. 導関数または微分係数: 定義, 意味, 応用
- § 2. 関数とは何だろうか
- § 3. 変数  $t$  の関数  $f(t)$  を  $t$  で微分すること
- § 4. 時間  $t$  の関数としての物体(粒子)の位置  $x(t)$
- § 5. 位置  $x$  の時間微分としての速度: 時間-位置図の傾き
- § 6. 速度  $v$  の時間微分としての加速度, 時間-速度図の傾き
- § 7. 速度から位置の, 加速度から速度の導出
- § 8. 参考: 加速度という物理量を発見したのは  
ガリレオ・ガリレイ(1564－1642, イタリア)

# § 0. 背景, 要点, 背後の思想

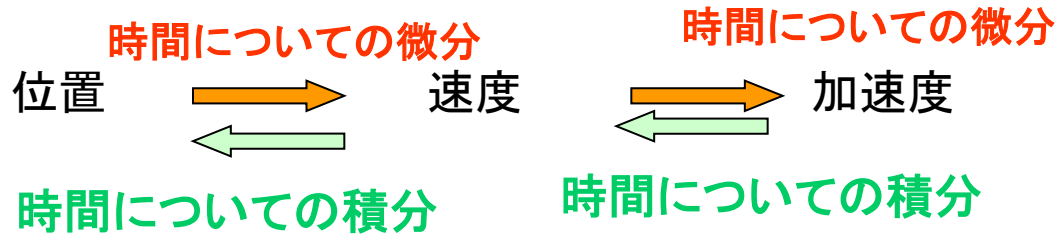
## 背景:

運動学: 物体(粒子)の力学的運動を考える学問、力を明示的には考えない。

微積分: 17世紀、ニュートン(英)とライプニッツ(独)により独立に発明された数学的方法。

物体(粒子)の空間的, 時間的変化を定量的に記述できる。

## 要点:



運動していることが一般的、  
運動の特殊な場合としての「静止」

## 背後の思想

広がりをもつ現実の物体(の運動)→抽象化:(点)粒子、質点

時間の一様等質無限性

空間の一様等質無限性



## ガリレイ (Galileo Galilei, 1564-1642)

イタリアの物理学者、天文学者、哲学者。

その業績から天文学の父と称され、ロジャー・ベーコンとともに科学的手法の開拓者の一人。慣性の法則の発見、加速度の発見、望遠鏡による天体の観察。

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/bc/Galileo-sustermans2.jpg/225px-Galileo-sustermans2.jpg>



## ニュートン (Sir Isaac Newton, 1642-1727)

イングランドの物理学者、数学者、自然哲学者。

主な業績:ニュートン力学の確立,万有引力の発見や  
微積分法の発見

<http://www.kusastro.kyoto-u.ac.jp/~tomita/vmuseum/newton/newton.jpg>



## ライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-

1716)ドイツの哲学者、数学者。ライルネ・デカルトやバールーフ・デ・スピノザなどとともに近世の大陸合理主義を代表する哲学者。微積分法の発見。(原子論には否定的であった。)

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6a/Gottfried\\_Wilhelm\\_von\\_Leibniz.jpg/200px-Gottfried\\_Wilhelm\\_von\\_Leibniz.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/6a/Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg/200px-Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg)

# § 1. 導関数または微分係数: 定義, 意味, 応用

変数  $x$  の関数  $f(x)$  を  $x$  で微分すること

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\equiv f'(x)$$

導関数 (derivative)  
微分係数 (differential coefficient)

$$f(x) = x \text{ の場合} \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$f(x) = 3x^2 + 5x + 8 \text{ の場合}$$
$$\rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d(3x^2 + 5x + 8)}{dx} = 6x + 5$$

$$f(x) = \sin x \text{ の場合}$$
$$\rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx}$$
$$= \cos x,$$

$$f(x) = \cos x \text{ の場合}$$
$$\rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx}$$
$$= -\sin x,$$

# 微分—概念とその応用

変数xの微分  $dx =$  (微小変化)

微分 (differential)

関数 $f(x)$ の微分 $df$

$$df \equiv \left( \frac{df}{dx} \right) \Delta x \equiv f'(x) \Delta x$$

$$f(x) = x \rightarrow dx = \Delta x$$

$$\therefore df = \left( \frac{df}{dx} \right) dx = f'(x) dx$$

$$\rightarrow \left( \frac{df}{dx} \right) = f'(x)$$

$$= \frac{df}{dx}$$

微分の割り算(商)としての導関数)微分係数

→ライプニッツの記号 $df/dx$ は

(1) 導関数であること、

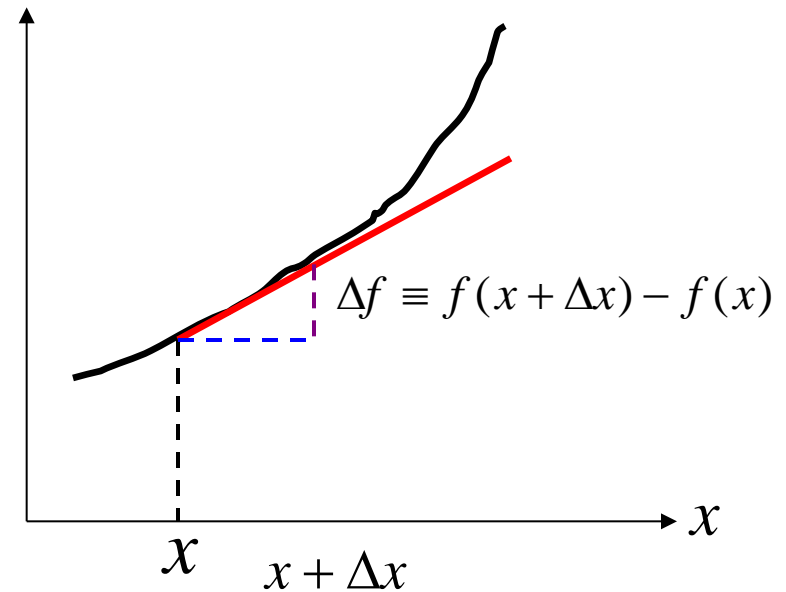
(2) 二つの微分の割り算(商)

という二つの意味をもつ！

# 微分係数(導関数)

変数 $x$ の関数 $f(x)$  の微分係数の定義

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



ある点におけるグラフの傾き  
局所的变化率としての微分係数

# 関数の増分と微分

変数 $x$ の増分 $\Delta x$ に対応する関数 $f(x,y)$ の増分

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\cong [f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 + \dots] - f(x) \quad (\text{テーラー展開})$$

$$= f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 + \dots$$

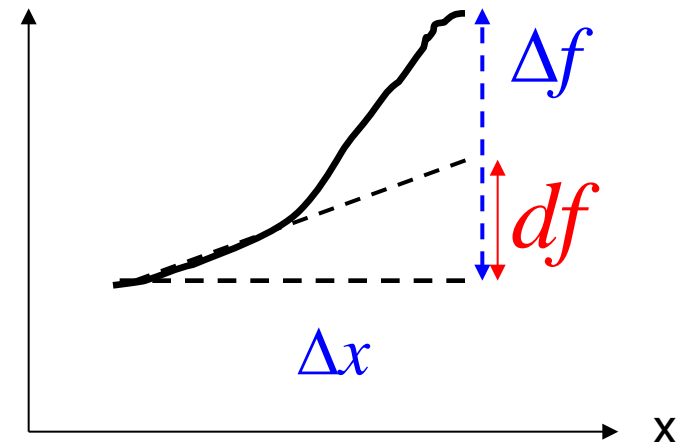
関数の微分: 関数の増分の主要な部分

$$df \equiv \left(\frac{df}{dx}\right)\Delta x$$

$$\rightarrow f(x) = x \text{ の場合 ; } dx = \left(\frac{dx}{dx}\right)\Delta x$$

$$\rightarrow \boxed{dx = \Delta x}$$

変数の増分 = 変数の微分



$$\boxed{df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx} \rightarrow \left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{df}{dx} \quad \text{微分商としての微分係数}$$

# 微分 (differential) の公式

$c$ : 定数

$$(1) dc = 0$$

$$(2) d(cf) = cdf$$

$$(3) d(fg) = fdg + gdf$$

$$(4) d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

例題 :  $f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

$$\rightarrow df = (3x^2 - 6x + 2)dx$$



# 合成関数の微分係数

変数  $x$  の関数  $f$  があり、さらに、「変数」 $f$  の関数  $g$  がある場合

$$f = f(x), g = g(f) = g[f(x)]$$

$$\frac{d}{dx} g[f(x)] = \left( \frac{dg}{df} \right) \left( \frac{df}{dx} \right) = g'(f) f'(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} g[f(x)] = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx} = \left( \frac{dg}{df} \right) \left( \frac{df}{dx} \right) = g'(f) f'(x)$$

## 助変数(パラメタ)の微分係数

ある変数  $t$  の二つの関数  $f(t), g(t)$  が与えられているとする。

$$\left( \frac{dg}{df} \right) = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$$\therefore \left( \frac{dg}{df} \right) = \frac{dg}{df} = \frac{dg}{dt} \frac{dt}{df} = \frac{\left( \frac{dg}{dt} \right)}{\left( \frac{df}{dt} \right)} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

# 微分の応用例

単振り子の周期 $T$ は、ひもの長さ $L$ 、重力加速度 $g$ とすると

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

ひもの長さが約2%変化したとき、周期 $T$ は近似的にどれくらい変化するか。

解

周期 $T$ をひもの長さ $L$ の関数とみなして、周期の変化 $\Delta T$ を周期の微分で近似する。

$$dT \cong \Delta T = \left( \frac{dT}{dL} \right) dL = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Lg}} dL = \frac{1}{2} T \frac{dL}{L}$$

$$dL = 0.02L \rightarrow dT \cong \frac{1}{2} T \times 0.02$$

$$\rightarrow \frac{dT}{T} \cong 0.01$$

周期はほぼ1%変化する

# 合成関数の微分

変数  $t$  の関数  $u(x)$       「変数」  $u(x)$  の関数  $f(u)$

$$\begin{aligned}\frac{df(u(x))}{dx} &\equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x + \Delta x)) - f(u(x))}{\Delta x}, & u(x + \Delta x) &\equiv u(x) + \Delta u \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{df(u(x))}{dx} = \left( \frac{df}{du} \right) \left( \frac{du}{dx} \right)}$$

実例

$$f(x) \equiv \sin(2x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d[\sin(2x)]}{dx} = \frac{d[\sin(u)]}{du} \frac{du}{dx} = 2 \cos(2x),$$

$$f(x) \equiv \cos(2x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d[\cos(2x)]}{dx} = \frac{d[\cos(u)]}{du} \frac{du}{dx} = -2 \sin(2x),$$

$$f(x) \equiv \sin(\omega x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d[\sin(\omega x)]}{dx} = \frac{d[\sin(u)]}{du} \frac{du}{dx} = \omega \cos(\omega x),$$

$$f(x) \equiv \cos(\omega x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d[\cos(\omega x)]}{dx} = \frac{d[\cos(u)]}{du} \frac{du}{dx} = -\omega \sin(\omega x),$$

## § 2.関数とは何だろうか

ある量(変数)を入力したときに、与えられたやり方・規則で別の量に対応させる機能をもつ関係を関数という。

例1:  $f(x) = 2x^2 + x$  Xという変数(量)に対して、  
 $2x^2 + x$  という値(量)に対応させること、またはその機能を意味する。



$f(y) = 2y^2 + y$   $f(z) = 2z^2 + z$  とも表現できる。

さらに次のように表現することもできるだろう。  $f( ) = 2( )^2 + ( )$

すなわち、関数とは( )に何らかの量が“入力”されると

$f( )$  という値を“出力”する(作る・計算する)という機能を表わすのである。

例2:  $f(x) = ax^2 + bx, (a, b : \text{一定})$

この例のように関数形として、明示的には与えられていないが、変数には関係のない定数(  $a, b$  )が含まれる場合もある。もちろん、この場合にも例1と同様に

$$f(y) = ay^2 + by$$

とも表すことができる。さらに、次のように表してもよい。

$$f(z) = az^2 + bz$$

さらに次のように表現することもできるだろう。

$$f(\quad) = a(\quad)^2 + b(\quad)$$

**関数の本質はその機能(function)にある！**

## § 3. 変数 $t$ の関数 $f(t)$ を $t$ で微分すること

$x$  の関数  $f(x)$  を微分するように、同じ定義、同じ意味、同じ公式、同じ応用ができる！

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

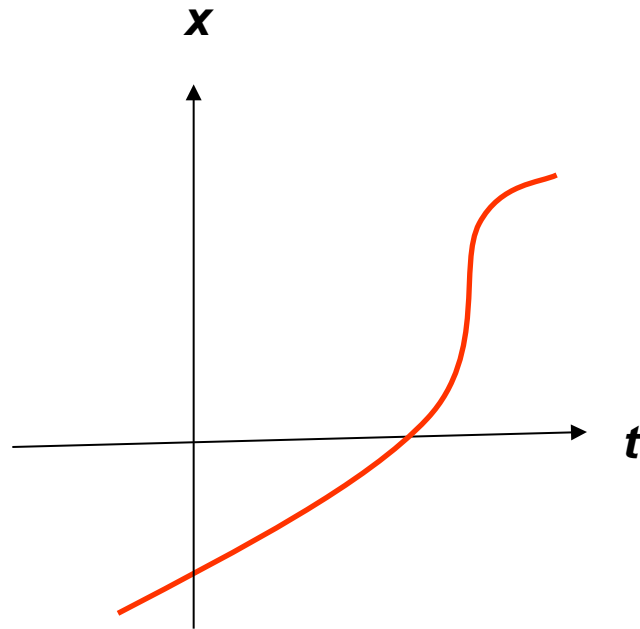
$$f(t) \equiv t \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1$$

$$f(t) \equiv 3t^2 + 5t + 8 \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{d(3t^2 + 5t + 8)}{dt} = 6t + 5$$

$$f(t) \equiv \sin t \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{d(\sin t)}{dt} = \cos t,$$

$$f(t) \equiv \cos t \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{d(\cos t)}{dt} = -\sin t,$$

## § 4. 時間 $t$ の関数としての物体 (粒子) の位置 $x(t)$



## § 5. 位置 $x$ の時間微分としての速度: 時間-位置図の傾き

### 直線運動の平均速度

時刻  $t_1$  と  $t_2$  における、物体 (粒子) の位置がそれぞれ  $x_1, x_2$  の場合、この間の平均速度

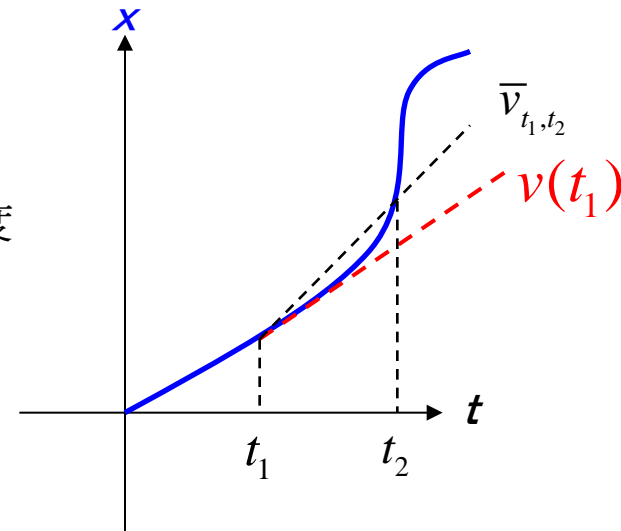
$$\bar{v}_{t_1, t_2} \equiv \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

十分小さい  $\Delta t$  に対して、時刻  $t$  における (瞬間的) 速度

$$v(t) \cong \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

(厳密には) 時刻  $t$  における、(瞬間的) 速度

$$\begin{aligned} v(t) &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &\equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t) \end{aligned}$$



時刻-位置図 (t-x 図)



## § 6.速度 $v$ の時間微分としての加速度, 時間-速度図の傾き

### 直線運動の平均加速度

時刻  $t_1$  と  $t_2$  における、物体(粒子)の速度がそれぞれ  $v_1, v_2$  の場合、この間の平均加速度

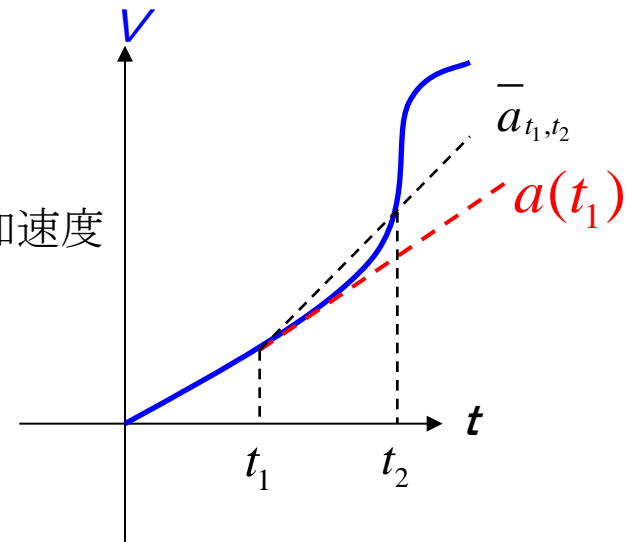
$$\bar{a}_{t_1, t_2} \equiv \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

十分小さい  $\Delta t$  に対して、時刻  $t$  における(瞬間的)加速度

$$a(t) \equiv \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

()厳密には) 時刻  $t$  における、(瞬間的)加速度

$$\begin{aligned} a(t) &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \\ &\equiv \frac{dv(t)}{dt} \equiv \dot{v}(t) \end{aligned}$$



時刻-速度図(t-V図)

## § 7. 速度から位置の, 加速度から速度の導出

速度の時間についての定積分→位置変化

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t v(t') dt' &= \int_{t_0}^t \frac{dx(t')}{dt'} dt' \\ &= \int_{t_0}^t dx \\ &= x(t) - x(t_0)\end{aligned}$$

加速度の時間についての定積分→速度変化

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t a(t') dt' &= \int_{t_0}^t \frac{dv(t')}{dt'} dt' \\ &= \int_{t_0}^t dv \\ &= v(t) - v(t_0)\end{aligned}$$

## § 8.参考:加速度という物理量を発見したのは ガリレオ・ガリレイ(1564-1642, イタリア)

参考:武谷三男「物理学入門(上)」岩波新書、1968年。pp.123-139.  
朝永振一郎「物理学とは何だろうか(上)」岩波新書、1979年。pp.58-86.

### 参考:地震の震度、建築物の耐震性の評価における 速度、加速度の単位

ガル(gal, 記号:Gal)は、CGS単位系における加速度の単位である。その名前は、ガリレオ・ガリレイにちなむもので、単位名をガリレオ (galileo) としている地域もある。

1ガルは、1秒(s)に1センチメートル毎秒(cm/s)の加速度の大きさと定義されている。すなわちガルは「センチメートル毎秒毎秒」(cm/s<sup>2</sup>)と書き表すことができる。国際単位系(SI)における加速度の単位はメートル毎秒毎秒(m/s<sup>2</sup>)であり、**1ガル (gal) = 1 cm/s<sup>2</sup> = 0.01 m/s<sup>2</sup>**となる。

ガルは非SI単位であるが、日本の計量法では重力加速度および地震に係る振動加速度の計量に限定してガル(Gal)および1000分の1のミリガル(mGal)の使用を認めている。

地球表面における重力加速度はおよそ981ガルである。

世界最大の地震による加速度は、岩手・宮城内陸地震(2008年6月14日)の際に岩手県一関市巖手町祭時で観測した4022ガルである。

出典:Wikipedia ガルの項目