参考

速度と加速度(２)ー2,3次元系ー

目次

Made by R. Okamoto (Emeritus prof., Kyushu Inst. of Tech.),
filename=velocity-accel-23dim-summar20151019B.ppt

§0.ベクトルとその性質、物理学で使われる理由

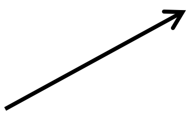
§0.1. 定義

・ベクトル(vector)量とは大きさと向きをもつ量をいう。
⇔スカラー（scaler）量とは大きさだけをもつ量という

・その大きさは終点から始点までの距離であるから，その向きは複数の成分間の比であるから，ベクトル自体を平行移動しても回転させても，その性質は同じである。

ベクトルの表示法

ベクトルA $\vec{A}$, $\mathbf{A}$



2次元の場合

$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ 3次元の場合

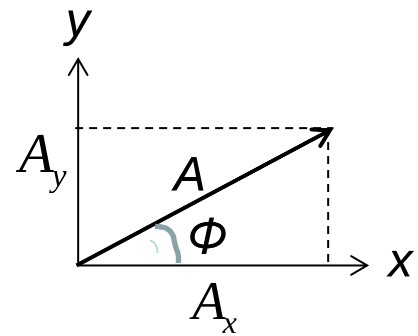
§0.2. 2次元系におけるベクトル

成分表示 $\vec{A}=(A_x, A_y)\cdots(0.1)$

ベクトルAの大きさ $A\equiv\sqrt{A_x^2+A_y^2}\cdots(0.2)$

ベクトルAの向き $\tan\phi=\dfrac{A_y}{A_x}\cdots(0.3)$

ベクトルAの成分 $\left.\begin{array}{l} A_x=A\cos\phi \\ A_y=A\sin\phi \end{array}\right\}\cdots(0.4)$



（Φ:ファイ（phi）と発音する）

２つのベクトルが等しいことは
各成分同士が等しいこと

$$\vec{A}=\vec{B}\rightleftarrows$$

$$\{A_x=B_x, A_y=B_y\}$$

ベクトルの加減はベクトルの各成分間の加減

$$\vec{A}=(A_x, A_y), \vec{B}=(B_x, B_y)$$

$$\to \vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x, A_y+B_y),$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x, A_y-B_y)\cdots(0.5)$$

ベクトル量とスカラー量の積は
ベクトルの各成分とスカラー量の積

$$c\vec{A}=(cA_x, cA_y)\cdots(0.6)$$

$$-\vec{A}=(-A_x, -A_y)\cdots(0.7)$$

§ 0.3. 3次元系におけるベクトル

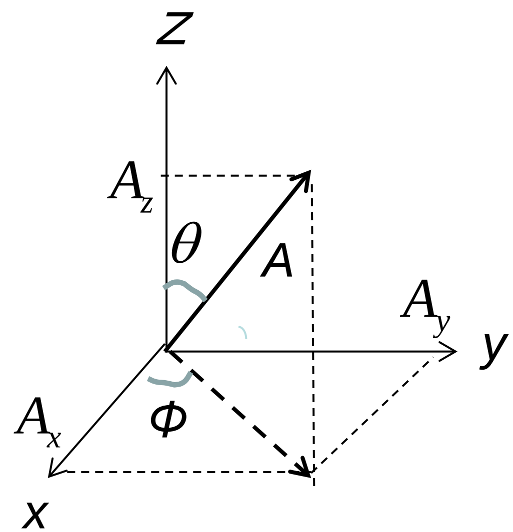
成分表示 $\vec{A}=(A_x, A_y, A_z)\cdots(0.8)$

ベクトルAの大きさ $A\equiv\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\cdots(0.9)$

$$\tan\phi=\frac{A_y}{A_x}\cdots(0.10)$$

ベクトルAの向き

$$\tan\theta=\frac{A_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}\cdots(0.11)$$



ベクトルAの成分

$$\left.\begin{aligned}A_x&=A\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi\\A_y&=A\cdot\sin\theta\cdot\sin\phi\\A_z&=A\cdot\cos\theta\end{aligned}\right\}\cdots(0.12)$$

２つのベクトルが等しいことは
各成分同士が等しいこと

$$\vec{A}=\vec{B}\rightleftarrows$$

$$\left\{A_x=B_x, A_y=B_y, A_z=B_z\right\}$$

ベクトルの加減はベクトルの各成分間の加減

$$\vec{A}=(A_x,A_y,A_z), \vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$$

$$\to\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z)\cdots(0.13)$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x, A_y-B_y, A_z-B_z)\cdots(0.14)$$

ベクトル量とスカラー量の積はベクトルの各成分とスカラー量の積

$$c\vec{A}=(cA_x, cA_y, cA_z)\cdots(0.15)$$

$$-\vec{A}=(-A_x,-A_y,-A_z)\cdots(0.16)$$

物理学で使われる理由

物理学でベクトルを使う理由は次の通りである。
１）多くの物理量が（単位と）大きさと向きを持つこと。

２）物理法則は空間並進対称性と空間回転対称性をもっている：
物理法則は座標原点の平行移動をしてもその基本的性質は同じである。
物理法則は座標軸の回転をしてもその基本的性質は同じである。

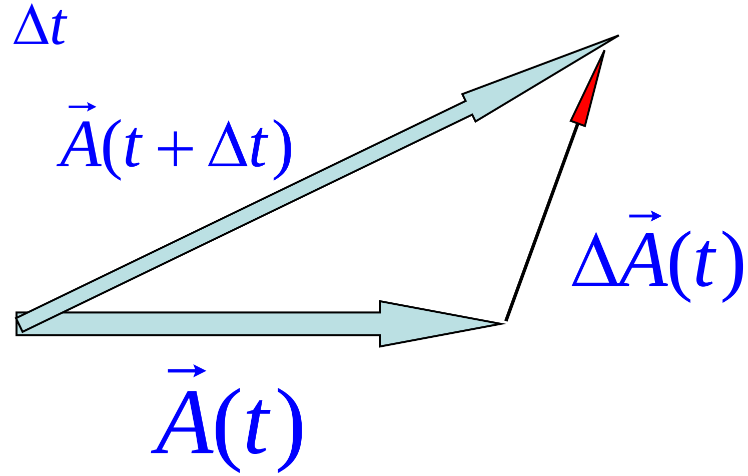
３）物理法則が特定の座標表示から独立して成立するので問題状況に応じて，計算実行が容易な座標を選んでよい。

１．時間に依存するベクトルの微分係数（導関数）

時間に依存するベクトル　$\vec{A} = \vec{A}(t)$

ベクトルの時間についての微分係数（導関数）

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{A}(t)}{\Delta t}$$



ベクトルの内積の微分

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$$

2. 速度ベクトル

位置ベクトル $\vec{r} = \vec{r}(t)$

変位ベクトル $\Delta\vec{r}(t) \equiv \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

velocity

速度ベクトル：位置ベクトルの時間についての微分係数（導関数）：

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{dz}{dt}\right)\vec{k} = (v_x, v_y, v_z)$$

速さ

speed

$$v \equiv \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$$

3．加速度ベクトル

加速度ベクトル：速度ベクトルの時間についての微分係数（導関数）

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{dv_x}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)\vec{k}$$

$$= (a_x, a_y, a_z)$$

加速度の大きさ

$$a \equiv \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$$

4. 平面(2次元)運動における座標表示の種類

4.1直交直線座標における速度・速さ、加速度

直交直線座標系をデカルト座標系ともいう。

2次元系における位置 $(x, y); x = x(t),\ y = y(t)$

x方向の速度
$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}$$

y方向の速度
$$v_y \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dy(t)}{dt} \equiv \dot{y}$$

速さ(speed)
$$v \equiv \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

x方向の加速度
$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dv_x(t)}{dt} \equiv \dot{v}_x$$

y方向の加速度
$$a_y \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dv_y(t)}{dt} \equiv \dot{v}_y$$

4.2等速円運動における位置、速度、加速度

位置　$(r,\theta): r = r(t), \theta = \theta(t)$

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

中心角θラジアンの扇形の弧の長さs　$s = r\theta$

円運動：半径 r 一定の運動　　角速度　$\omega \equiv \dfrac{d\theta}{dt}$

等速円運動：角速度一定、速さ一定の円運動　$\theta(t) = \omega t + \theta_0 \quad (\theta_0 : 一定)$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d[r\cos(\omega t + \theta_0)]}{dt} = -\omega r\sin(\omega t + \theta_0) = -\omega y,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d[r\sin(\omega t + \theta_0)]}{dt} = \omega r\cos(\omega t + \theta_0) = \omega x,$$

$\vec{r}\cdot\vec{v} = x\cdot(-\omega y) + y\cdot(\omega x) = 0,$

$\vec{r}$ と $\vec{v}$ は常に直交

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 r\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 r\sin(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 y,$$

$\vec{a} = -\omega^2\vec{r},$

$\vec{a}$ は中心向き（向心加速度）

4.3（参考）一般の平面運動における極座標を用いた速度、加速度の表現

位置ベクトル $\vec{r} = r\vec{e}_r$

$(\vec{e}_r : r$が増える向きの単位ベクトル$)$

$(\vec{e}_\vartheta : \theta$が増える向きの単位ベクトル$)$

速度ベクトル

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\vartheta$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad (\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt})$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \quad (\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt})$$

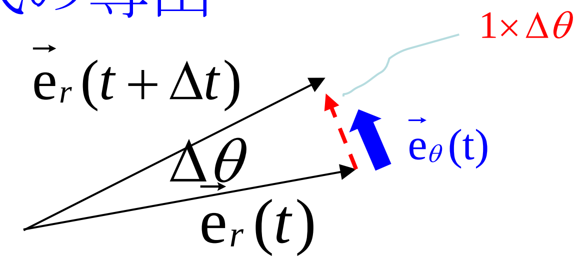
加速度ベクトル

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\vartheta$$

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

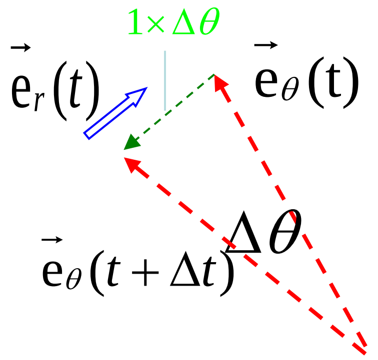
平面極座標における速度、加速度の式の導出



準備：基本ベクトルの時間変化率

$$\frac{d\vec{e}_r(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{e}_r(t+\Delta t)-\vec{e}_r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta\cdot\vec{e}_\theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\vec{e}_\theta(t)$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta(t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{e}_\theta(t+\Delta t)-\vec{e}_\theta(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta\theta\cdot\vec{e}_r(t)}{\Delta t} = -\frac{d\theta}{dt}\cdot\vec{e}_r(t)$$



速度ベクトル

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{e}_r\right) = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r + r\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{e}_r\right)$$

$$= \dot{r}\;\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

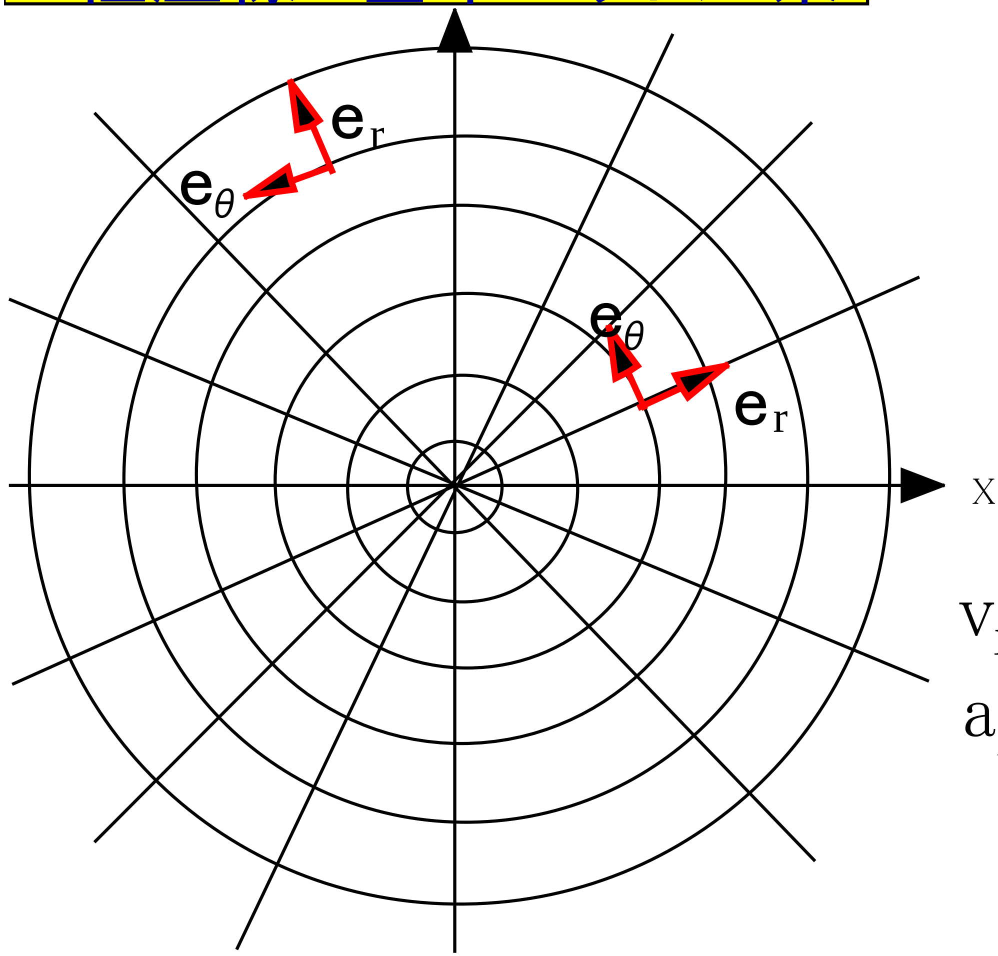
加速度ベクトル

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\;\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right) = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\cdot\frac{d\,\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\,\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

極座標系の基本ベクトルの時間変化

極座標と基本ベクトル系



極座標の場合,
位置により基本ベクトル
（座標軸向きの大きさ1のベクトル）
の向きは変化する。
　この座標軸の時間的変化の効果
が余分な項として不可される。

$$v_r = \dot{r}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

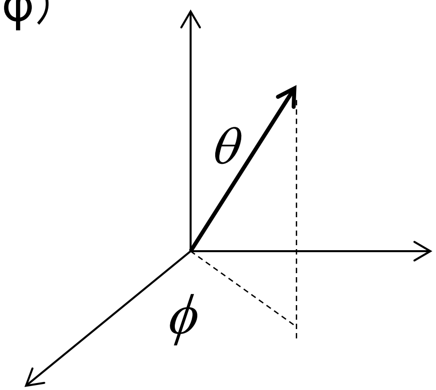
5. 3次元系における他の座標表示

3 球座標系(次元極座標系)の位置ベクトル; (r,θ,φ)

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, \qquad \tan\phi = \frac{y}{x},$$

$$z = r \cdot \cos\theta \qquad \tan\phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$



半径、二つの角度が増加する方向の単位ベクトル(基本ベクトル)をそれぞれ定義する:

$$\vec{\mathrm{e}}_r, \vec{\mathrm{e}}_\theta, \vec{\mathrm{e}}_\phi$$

注意：球座標系の場合、一般には、動径rだけではなく、
単位ベクトルの向きも時間とともに変化する

位置ベクトルの表現 $\vec{r} = r \cdot \vec{\mathrm{e}}_r$

速度ベクトルの表現 $\vec{v} = \dot{r}\vec{\mathrm{e}}_r + r\dot{\theta}\vec{\mathrm{e}}_\theta + r\sin\theta \cdot \dot{\phi}\vec{\mathrm{e}}_\phi$

加速度ベクトルの表現 $\vec{a} = a_r\vec{\mathrm{e}}_r + a_\theta\vec{\mathrm{e}}_\theta + a_\phi\vec{\mathrm{e}}_\phi,$

$$\begin{cases} a_r \equiv \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta \\ a_\theta \equiv r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta \\ a_\phi \equiv r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta \end{cases}$$