（等速円運動ー速度，加速度; filename=velocity-acceleration-circular-motion-QA20151125A.tex）

半径 r，角速度 ω の等速円運動を行う粒子の速度，加速度について次の問いに答えよ．

1. 初め x 軸上にあった粒子の，時刻 t における，その位置ベクトル $\vec{r}=(x,y)$ の x,y 座標を表せ．
2. 時刻 t における粒子の速度ベクトル $\vec{v}$ の x,y 成分 v_x, v_y を求め，速さ v が $v=r\omega$ と表せることを示せ．
3. 時刻 t における粒子の加速度ベクトル $\vec{a}$ の x,y 成分 a_x, a_y を求め，$\vec{a}=-\omega^2\vec{r}$(加速度が中心向きであること）で加速度の大きさ a が $a=r\omega^2=v^2/r$ と表せることを示せ．
4. 任意の時刻において，$\vec{r}$ と $\vec{v}$ が直交することを示せ．

（解答例）

1. 題意より $x(t)=r\cos(\omega t),\ y(t)=r\sin(\omega t)$.
2. 前問の結果をそれぞれ時間 t で微分すると，合成関数の微分公式を用いて

$$\begin{aligned}
v_x(t) &\equiv \frac{dx}{dt}=r\frac{d\cos(\omega t)}{dt}=r\frac{d\cos u}{du}\cdot\frac{du}{dt},\ (u\equiv\omega t)\\
&= -r\omega\sin(\omega t),\\
v_y(t) &\equiv \frac{dy}{dt}=r\frac{d\sin(\omega t)}{dt}=r\frac{d\sin u}{du}\cdot\frac{du}{dt},\ (u\equiv\omega t)\\
&= r\omega\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

が求まる．これらの結果を用いて，速さ v は以下のように求まる．

$$\begin{aligned}
v &\equiv \sqrt{v_x^2+v_y^2}=r\omega[\cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t)]\\
\to v &= r\omega.
\end{aligned}$$

3. 同様に，v_x, v_y をそれぞれ時間 t で微分すると

$$\begin{aligned}
a_x(t) &\equiv \frac{dv_x}{dt}=-r\omega^2\cos(\omega t),\\
a_y(t) &\equiv \frac{dv_y}{dt}=-r\omega^2\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

が求まる．これらの結果を用いて，加速度 $\vec{a}$ とその大きさ a は以下のように求まる．

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= -\omega^2\vec{r},\\
a &\equiv \sqrt{a_x^2+a_y^2}=r\omega^2=\frac{v^2}{r}.
\end{aligned}$$

4. $\vec{r}$ と $\vec{v}$ の内積 (スカラー積）を計算すると

$$\begin{aligned}
\vec{r}\cdot\vec{v} &= xv_x+yv_y=r\cos(\omega t)\cdot[-r\omega\sin(\omega t)]+r\sin(\omega t)\cdot[r\omega\cos(\omega t)]\\
&= 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

となり，$\vec{r}$ と $\vec{v}$ が直交することが示された．