

単振動または調和振動

1. いろいろな場面(現象)における振動的運動

バネ

振り子

U字管内の水

フライホイール系

コイル・コンデンサー回路

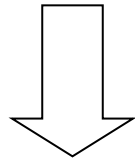
分子における振動

原子核における振動(表面振動、巨大共鳴状態)

Made by R. Okamoto (Emeritus prof. Kyushu Inst. of Tech.)
filename=vibration(1)-summary130430.ppt

2. 現実的振動の理想化としての単振動

現実の振動的運動：有限の空間的領域内、
有限の時間だけ持続、
最終的には減衰し、消滅する。
複雑な挙動。



理想化

単振動：無限の時間持続し、減衰しない。
単純な挙動。

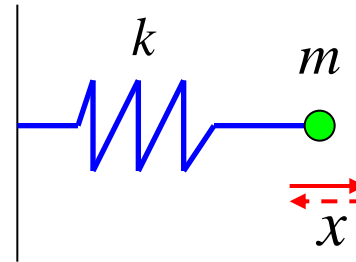
3. 単振動の特徴と基本的性質

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta) = A \cos(\omega t + \delta')$$

振幅 (amplitude) A

角振動数 ω

振動数 f



$$\omega \equiv 2\pi f \rightarrow f \equiv \frac{\omega}{2\pi}$$

周期 T $x(t + T) = x(t) \rightarrow \omega T = 2\pi$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

4. フックの法則—物体の位置の微小変化と安定性—

http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Robert_Hooke

Robert Hooke (1635- 1703) 写真など興味深いHP

イギリスの物理学者、生物学者。
オックスフォード大学に学び、
ロバート・ボイルの助手となる。
フックの法則の発見。
万有引力の先取権などについて
ニュートンと論争。

(著作権を考慮して
図版を省略)

あらゆる固体は一種のバネ(の集まり)である。

Ceiino ssstuv(暗号)→Ut tensio sic vis(ラテン語):

伸びと(回復)力は比例する

フックの論文の挿図

江沢洋、板倉聖宣「物理学入門」(国土社、1964年)

5. 単振動の微分方程式とその一般解

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad [m > 0, k > 0; x = x(t)] \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$	[A, δ : 任意定数]	Aと δ (δ')の組とaとbの組
$= A \cos(\omega t + \delta')$	[A, δ' : 任意定数]	(またはa'とb'の組)は
$= a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$	[a, b: 任意定数]	相互に関係づけられる。
$= a' e^{i\omega t} + b' e^{-i\omega t}$	[a', b': 任意定数]	

2階の(線形)微分方程式の一般解: 二つの独立な任意定数を含む解
二つの基本解の一次結合

二つの独立な解(基本解)が x_1 と x_2 が求められたとする。

任意定数 c_1 と c_2 を用いた一次結合 ($c_1 x_1 + c_2 x_2$) も解である。

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1, \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx_2$$

$$\rightarrow m \frac{d^2 (c_1 x_1 + c_2 x_2)}{dt^2} = c_1 \left(m \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) + c_2 \left(m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right)$$

$$= -k(c_1 x_1 + c_2 x_2)$$

そして二つの任意定数を含むので、
一般解であるといえる。

一般解の表現式の間関係(1)

$$A \cos(\omega t + \delta') = A \sin(\omega t + \delta' + \pi/2), \quad \delta' + \pi/2 \equiv \delta$$

$$a \cdot \sin(\omega t) + b \cdot \cos(\omega t)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left[\sin(\omega t) \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos(\omega t) \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} [\sin(\omega t) \cos \delta + \cos(\omega t) \sin \delta]$$

$$= A \sin(\omega t + \delta),$$

$$A \equiv \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos \delta \equiv \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \delta \equiv \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \tan \delta \equiv \frac{b}{a}$$

単振動の一般解の必要条件

2階の微分方程式であるから、一般解は2つの任意定数(積分定数)をもち、かつ元の微分方程式を満たさなければならない。

$$x(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega a \cdot \cos(\omega t) - \omega b \cdot \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\omega^2 a \cdot \sin(\omega t) - \omega^2 b \cdot \cos(\omega t) \\ &= -\omega^2 x. \end{aligned}$$

備考: 次の形の解は任意定数を2つもつが、元の微分方程式を満たさず、一般解にならない。

$$x = c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2, \quad (c_1, c_2 : \text{任意定数})$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -c_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t),$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} &= -c_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \\ &= -\omega^2 x + \omega^2 \cdot c_2 \\ &\neq -\omega^2 x \end{aligned}$$

単振動の一般解の十分条件

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad [m > 0, k > 0; x = x(t)]$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \left(\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \frac{dx}{dt} \quad \leftarrow \text{ヒント(別紙)参照}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right]$$

$$\rightarrow \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -\omega^2 x^2 + C \geq 0$$

$$\equiv \omega^2 (B^2 - x^2), \omega^2 B^2 \equiv C \quad \leftarrow \text{左辺は正かゼロの値}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \omega \sqrt{B^2 - x^2}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{\sqrt{B^2 - x^2}} = \pm \omega dt \quad \leftarrow \text{変数分離型微分方程式}$$

ヒント

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^2 = \frac{d}{dx}[f(x) \cdot f(x)] = \frac{df(x)}{dx} f(x) + f(x) \frac{df(x)}{dx} = 2f(x) \frac{df(x)}{dx}$$

$$\rightarrow f(x) \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}[f(x)]^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{B^2 - x^2}} = \pm \int \omega dt;$$

$$\text{積分公式} : \int \frac{dx}{\sqrt{B^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{B} \right) + C_1, \quad [C_1 : \text{定数}] \quad (\text{注 1})$$

$$\int \omega dt = \omega t + C_2, \quad [C_2 : \text{定数}]$$

$$\rightarrow \pm \sin^{-1} \left(\frac{x}{B} \right) = \omega t + \delta, \quad [\delta \equiv C_2 - C_1 : \text{任意定数}]$$

$$\rightarrow x(t) = A \sin(\omega t + \delta), \quad [A \equiv \pm B, \delta : \text{独立な任意定数}]$$

注1 積分公式： $\int \frac{dx}{\sqrt{B^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{B} \right) + C_1$, [C_1 :定数] の証明

$$y \equiv \sin^{-1} x$$

$$\rightarrow \frac{d \sin^{-1} x}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy} \right)}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pm \sin^{-1} x. \leftarrow x = \sin y$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{B^2 - x^2}} &= \int \frac{dx}{B \sqrt{1 - (x/B)^2}} \\ &= \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad [z \equiv x/B] \\ &= \pm \sin^{-1} \left(\frac{x}{B} \right) \end{aligned}$$

6. 初期条件と単振動の特殊解

単振動の運動方程式(微分方程式)の一般解には任意定数が2つ含まれている。そこで、運動方程式とは独立に、2つの初期条件を与えると、任意定数が具体的に定まり、特殊解が得られる。

時刻 $t=0$ において、位置が x_0 、速度がゼロの場合の特殊解

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

時刻 $t=0$ において、位置が原点、速度が v_0 の場合の特殊解

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

7. 等速円運動と単振動(調和振動)の関係

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$y = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$\rightarrow \frac{dx^2}{dt^2} = -\omega^2 x, \frac{dy^2}{dt^2} = -\omega^2 y$$

単振動 \longleftrightarrow 等速円運動

古代ギリシャ人(紀元前5世紀ごろ)の概念

円形、球状天体は中心から等距離、等速円運動

調和(harmony)、秩序(order)

宇宙=Cosmos

8. 参考:フックの法則の限界—非線形効果—

変位が大きくなると、変位の2乗以上の次数にも依存した力の効果(=非線形効果、非調和効果)が無視できなくなる。

$$F(x) = -kx + bx^2 + \dots$$

この場合には、解は解析的には表現できず、数値的な解法(非線形計算)が必要となる。

参考:「巨人の肩に乗って遠くを見渡す」

ニュートンの言葉としてしばしば引用される。しかし、

ライバルであるロバート・フックあての1676年2月5日付けの手紙に使用された。ただし、この言葉はニュートンの独創というわけではなく、1159年にすでに引用の形で残っているとのこと。

「巨人の肩に乗って 現代科学の気鋭、偉大なる先人を語る」
(メルヴィン・ブラッグ (Melvyn Bragg) 著 熊谷千寿 訳 長谷川真理子 解説
翔泳社 2200円 原題: On Giants' Shoulders, 1998)

アインシュタインも同じ表現を使ったことが知られている。〔カレンダー〕

『ビッグバン宇宙論 上下』(サイモン・シン著, 青木薫訳, 新潮社, 2006年)

◆1997年にイギリスで発刊された2ポンド硬貨には、ギザギザの縁のところに「巨人たちの肩の上に立って」という言葉が刻まれた。この言葉はニュートンが同僚の科学者ロバート・フックに宛てた手紙から採ったもので、ニュートンはそこで次のように書いている。「もしも私がほかの人たちよりも遠くを見たとすれば、それは巨人たちの肩の上に立ったおかげなのです」これはニュートンが、自分のアイディアはガリレオやピュタゴラスなど、名だたる先人たちのアイディアの上に築かれていることを認めた謙虚な言葉のように見える。しかし実際は、これは背骨が曲がってひどく屈んでいたフックの身体をそれとなく指し示す、悪意に満ちた表現だった。ニュートンは、フックは肉体的に巨人ではないことを思い至らせ、知性においてもまた巨人ではないことをほのめかしたのである。(上 p.138)