スカラー関数の勾配，ベクトルの発散と回転とその応用

目次

Made by R. Okamoto (Emeritus Prof. of Kyushu Institute of Technology)
Filename=gradient-divergence-rotation-summary20190115.ppt

スカラー関数の勾配(ベクトル)

スカラー関数 $\phi(x, y, z)$

スカラー関数の勾配（gradient）

$$\nabla\phi \equiv \mathrm{grad}\phi$$

$$\equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\equiv \left(\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

基本ベクトル

＝x,yz,軸方向の単位ベクトル

$$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$$

ナブラ（nabla)またはハミルトンの演算子

$$\nabla \equiv \mathrm{grad}$$

$$\equiv \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

スカラー関数を

偏微分して、ベクトルに変換する

$\vec{\nabla}\phi$は$\phi(x, y, z) = \mathrm{constant}$の面(等ポテンシャル面）に垂直

Φの全微分をとると

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dz$$

$$= \vec{\nabla}\phi \bullet d\vec{r}$$

等ポテンシャル面を考える＝(dx,dy,dz)を等ポテンシャル面上に限定する。

$$d\phi = 0$$

よって、

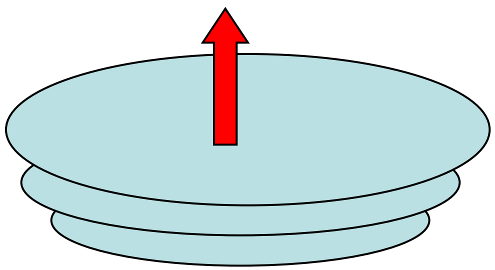
$$\vec{\nabla}\phi \bullet d\vec{r} = 0$$

すなわち、等ポテンシャル面上に限定された変位ベクトルと勾配の向きは垂直である。

$\nabla\phi, \mathrm{grad}\ \phi$ の性質

$$\phi\left(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}\right)=\mathrm{constant}$$

の曲面に垂直で、
一定値の大きい向きに向かう。



$$\phi\left(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}\right)$$

＝一定の曲面の外向き法線ベクトル $\mathbf{n}$

法線方向に対する**方向微分係数** $\dfrac{d\phi}{dn}$

$$\nabla\phi=\frac{d\phi}{dn}\mathbf{n},\ \nabla\phi\cdot\mathbf{n}=\frac{d\phi}{dn}$$

方向微分係数（または方向余弦）

点Pにおいて、Pを通る直線gを考え、gに正負の向きを定め、g上でその上の一点から測った長さsはgの向きに向かって増加するものとする。gに沿って考えれば、スカラー関数 φ はsの関数と見なすことができる。このとき、点Pにおいて、sに関する φ の微分係数 $\dfrac{d\varphi}{ds}$ はgの向きに対するスカラー関数の値の変化率を表す。これを点Pにおける、gの方向についての φ の方向微分係数（direction cosine）という。

物理例；保存力とそのポテンシャル

(3次元系における）保存力とは、その行う仕事が経路に依存しない力である。

保存力；重力、電気力など

$$\vec{F}^{c}(\vec{r})$$

ポテンシャル

$$U(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{r}'_0}^{\vec{r}} \vec{F}^{c}(\vec{r}\,')\bullet d\vec{r}\,'$$

ポテンシャルから保存力の各成分が求まる。

$$\vec{F}^{c}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

$$= \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

保存力の向きは、その等ポテンシャル面に垂直で、かつ減少する向きである。

ベクトル場とそのポテンシャル（スカラーポテンシャル）

保存力ベクトル　　　　ポテンシャル　$U(x, y, z)$

$\mathbf{F}(x, y, z), \quad \vec{F}(x, y, z)$

↓

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

他の例：電場ベクトルE と静電ポテンシャル　φ

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

ベクトル関数の回転

ベクトル関数***A***（*x*, *y*, *z*）が，変数*x*, *y*, *z*について連続で2階偏微分可能ならば

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) =$$

$$\to \nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\to \nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}$$

$$= 0.$$

ここで，2階の偏微分の順番を変えてもよいことを使った.
結果はベクトルとその成分の関数形によらない.