中性子星は中性子を主成分とし、その他の粒子 (ハイペロンなど）を含む天体である事が知られているが、中性子星を中性子だけから構成される巨大原子核（中性子原子核）と近似的に見なして、その安定性を考察することにより、その質量数、半径、質量を推定してみよう。
半径 R、質量 M の均質な (一様な) 球状物体の重力のポテンシャル・エネルギー（重力による自己エネルギー）が $-3GM^2/(5R)$(G : 重力定数) であることを用いて、陽子数 Z、質量数 A の原子核の結合エネルギーについてのベーテ・ワィツェッカーの公式 $E_{\rm B}(A,Z)$ が次のように拡張されるとする：

$$\begin{aligned} E'_{\rm B}(A,Z) &\equiv E_{\rm B}(A,Z)+\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \\ &= c_vA-c_sA^{2/3}-c_a\frac{(A-2Z)^2}{A}-c_c\frac{Z^2}{A^{1/3}}+\delta(A,Z)+\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、右辺の各項の係数は次のように与えられる：

$$c_v=15.56\text{MeV},\ c_s=17.23\text{MeV},\ c_a=23.285\text{MeV},\ c_c=0.697\text{MeV}, \tag{2}$$

$$\delta(Z,A)\equiv\begin{cases}\frac{130}{A}\text{MeV} & (Z,A\ \text{ともに偶数}) \\ 0 & (A\ \text{が奇数}) \\ -\frac{130}{A}\text{MeV} & (Z,A\ \text{ともに奇数})\end{cases} \tag{3}$$

1. $M=m_nA$ (m_n:中性子の質量)，$R=r_0A^{1/3}$ と表され、$A\gg 1$ $(A\geq 10^{50}), A\gg A^{2/3}$ であるとして、式 (1) の近似式を記せ。
2. 複合系としての中性子星の安定性の極限として $E'_B(A,0)=0$ と置いて、A を記号群（c_v,c_a,G,m_n,r_0）を用いて表す式を求めよ。
3. c_v,c_a については、式 (2) において与えられた値を用い、$r_0=1.2$ fm $=1.2\times 10^{-15}$ m$, G=6.7\times 10^{-11}$ Jmkg$^{-2}, m_n=1.67\times 10^{-27}$ kg として、質量数 A の値を計算せよ。
4. 前問の結果（A の値）を用いて、この仮想的な中性子原子核の半径 R(km 単位で) を計算せよ。
5. 同様に、質量 M を計算せよ。特に、質量 M は太陽質量 $M_S=1.989\times 10^{30}$ kg の何倍になるか。

(解答例)

1. 中性子だけから構成されるので、$Z=0$ であり、

$$E'_{\rm B}(A,0)\approx c_vA-c_sA^{2/3}-c_a\frac{(A)^2}{A}+\frac{3}{5}\frac{G(m_nA)^2}{r_0A^{1/3}}$$

$$\approx (c_v - c_a)A + \frac{3}{5}\frac{G(m_n)^2 A^{5/3}}{r_0}. \tag{4}$$

2. 題意より

$$\begin{aligned} 0 &\approx (c_v - c_a)A + \frac{3}{5}\frac{G(m_n)^2 A^{5/3}}{r_0} \\ \rightarrow A^{2/3} &\approx \frac{5}{3}\frac{(c_a - c_v)r_0}{G(m_n)^2} \\ \rightarrow A &\approx \left[\frac{5}{3}\frac{(c_a - c_v)r_0}{G(m_n)^2}\right]^{3/2}. \end{aligned} \tag{5}$$

3. 題意より

$$\begin{aligned} A &\approx \left[\frac{5}{3}\frac{(23.28 - 15.56)\ (1.6 \times 10^{-19+6}\mathrm{J}) \times 1.2 \times 10^{-15}\mathrm{m}}{6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{Jmkg}^{-2}(1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})^2}\right]^{3/2} \\ &\approx \left[\frac{5}{3}\frac{(23.28 - 15.56)\ (1.6 \times 1.2) \times 10^{-15+11+54-19+6}}{6.7 \times (1.67)^2}\right]^{3/2} \\ &\approx \left[1.323 \times 10^{37}\right]^{3/2} \\ \rightarrow A &\approx 4.8 \times 10^{55}. \end{aligned} \tag{6}$$

4. 題意より

$$\begin{aligned} R &= r_0 \times A^{1/3} \\ &= 1.2 \times 10^{-15}\mathrm{m} \times (4.8 \times 10^{55})^{1/3} \\ &= 1.2 \times 4.8^{1/3} \times 10^{-15+55/3}\mathrm{m} \\ &= 1.2 \times 1.69 \times 2154\ \mathrm{m} \\ \rightarrow R &= 4364.3\ \mathrm{m} \\ &= 4.36\ \mathrm{km}. \end{aligned} \tag{7}$$

5. 題意より

$$\begin{aligned} M &= m_n A \\ &= 1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} \times 4.8 \times 10^{55} \\ &= 8.02 \times 10^{28}\ \mathrm{kg} \\ &= \frac{8.02 \times 10^{28}\ \mathrm{kg}}{1.989 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}}\mathrm{M_S} \\ &= 0.04\ \mathrm{M}_S. \end{aligned} \tag{8}$$

備考：重力による自己エネルギー）が $-3GM^2/(5R)$ であることの証明：

一定密度 ρ の半径 r の球状部分と幅 dr の球殻部分との重力のポテンシャル・エネルギー dU は

$$
\begin{aligned}
dU &= -G\frac{\left(\frac{4\pi r^3\rho}{3}\right)\times(4\pi r^2 dr\rho)}{r} \\
&= -\left(\frac{16\pi^2\rho^2}{3}\right)r^4 dr. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
M = \frac{4\pi R^3\rho}{3} \to \rho = \frac{3M}{4\pi R^3}. \qquad (10)
$$

よって

$$
\begin{aligned}
dU &= -G\frac{16\pi^2}{3}\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^2 r^4 dr \\
&= -\frac{3GM^2}{R^6}r^4 dr. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{self}} &= \int_{r=0}^{R} dU \\
&= -\frac{3GM^2}{R^6}\int_0^R r^4 dr \\
&= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

(参考 : 詳しい研究によれば、$R \approx 20$ km, $M \approx (0.2-2.1)M_S$. ベーテ・ワィツェッカーの公式 $E_{\mathrm{B}}(A,Z)$ は $1 \leq A \leq 240$ に対して適用されるが、拡張されたベーテ・ワィツェッカーの公式 $E'_{\mathrm{B}}(A,Z)$ が A の超巨大な値（$A \approx 5\times 10^{55}$）まで外挿されることが分かる！)

本問題は以下の文献を参考にして作成した：
K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics*, Institute of Physics Publishing, 1994。特に、p. 207, Neutron star stability: a bold extrapolation.
岡　多賀彦編著「原子力演習-核エネルギーの解放とその利用」ERC 出版、2001 年。特に、p.75 コラム（中性子星）。