(崩壊熱:Pu239、Pu238)filename=decay-heat-Pu239-238-qa20200217A8.tex

原子核 ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ は，核分裂性の核として知られているが、$\alpha$ 粒子も放出する。この $\alpha$ 粒子の運動エネルギー $E_\alpha$ は $E_\alpha = 5.2$ MeV であり、原子核 ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ の $\alpha$ 崩壊の半減期 $T$ は $T = 24000$ y である。1 年間に 1 kg の ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ の $\alpha$ 崩壊によって発生する熱エネルギーを以下の手順に従い、J 単位で計算せよ。ただし、簡単のため、関連する運動エネルギーはすべて熱エネルギーに転化し、この $\alpha$ 崩壊の後に起こる放射性崩壊の影響は無視する。また、アボガドロ数 $N_\mathrm{A} = 6\times10^{23}/\mathrm{mol}$、$1\ \mathrm{MeV} = 10^6\ \mathrm{eV} = 1.6\times10^{-19}\times10^6\ \mathrm{J}, \ln 2 = 0.693$ を用いよ。

(a) 1 回の $\alpha$ 崩壊により発生する全運動エネルギー (=崩壊熱)$K$ を計算せよ。

(b) 1 kg の Pu 中の ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ 核の個数 $N_0$ を計算せよ。

(c) 1 年間に崩壊する ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ 核の個数 $\Delta N$ を計算せよ。

(d) 1 年間に 1 kg の ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ の $\alpha$ 崩壊によって発生する熱エネルギー $E$ を計算せよ。

(e) ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ の 1 kg の 1 年間の崩壊熱による熱出力 (単位は W/kg) を求めよ。

(f) 同様に、${}^{238}_{94}\mathrm{Pu}$ の $\alpha$ 粒子の運動エネルギー $E_\alpha$ は $E_\alpha = 5.5$ MeV、$\alpha$ 崩壊の半減期 $T$ は $T = 88$ y である。${}^{238}_{94}\mathrm{Pu}$ の 1 kg の 1 年間の崩壊熱による熱出力 (単位は W/kg) を求めよ。

[解答例]

(a) この $\alpha$ 崩壊により生じる娘核 ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ の質量を $M$，速度を $V$，$\alpha$ 粒子のそれらをそれぞれ $m_\alpha, v_\alpha$ とする．全運動エネルギー (=崩壊熱)$K$ は次のように表される．

$$K = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2}MV^2. \tag{1}$$

元の原子核 ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ は静止していたと考えると，運動量保存則が成立する．$\alpha$ 粒子と娘核 U が直線上を逆向きに運動すると考えて一般性を失わないので

$$0 = m_\alpha v_\alpha + M\cdot(-V) \tag{2}$$

が成り立つ．式 (2) より、$V = m_\alpha v_\alpha/M$ を式 (1) に代入すると

$$K = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{m_\alpha}{M}\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = (1+\frac{m}{M})E_\alpha \tag{3}$$

となる．題意より $E_\alpha = 5.2$ MeV, $m_\alpha/M \approx 4/235 = 0.017$ であるから

$$K = 1.017\times(5.2\times10^6\times1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J}) = 8.46\times10^{-13}\ \mathrm{J} \tag{4}$$

となる．(備考：この値だけでは極めて小さく無視できるように見える！)

(b) 題意より，${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ のグラム原子量が約 239 g であるから，$N_0$ は

$$N_0 \approx \frac{1\ \mathrm{kg}}{239\ \mathrm{g}} \times N_\mathrm{A} = 2.51 \times 10^{24}. \tag{5}$$

(c) ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ 核の初めの個数を $N_0$，崩壊定数を $\lambda$ とすると，時刻 $t$ における個数 $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$ となるので

$$\begin{aligned}\Delta N &\equiv N_0 - N(t) = N_0(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) \approx N_0 \lambda t = N_0 \frac{\ln 2 \cdot t}{T} \\ &= 2.51 \times 10^{24} \times 0.693 \times \frac{1\ \mathrm{y}}{24000\ \mathrm{y}} = 0.725 \times 10^{20}. \end{aligned} \tag{6}$$

ここで、$\lambda t << 1$ であり、近似公式 $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$ ($|x| << 1$ の場合) を用いた。

(d) 以上の結果より，全熱エネルギー $E$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}E &\equiv \Delta N \times K = (0.725 \times 10^{20}) \times 8.46 \times 10^{-13}\ \mathrm{J} \\ &= 6.13 \times 10^7\ \mathrm{J}\end{aligned} \tag{7}$$

(e) 題意より、$1\ \mathrm{y} = 365 \times 24 \times 60 \times 60\ \mathrm{s} = 3.15 \times 10^7\ \mathrm{s}$ であるから、${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ の熱出力 $P$ は

$$\begin{aligned}P &= \frac{E}{t} = \frac{6.13 \times 10^7\ \mathrm{J}}{3.15 \times 10^7\ \mathrm{s}} \\ \to P &= 1.95\ \mathrm{W}.\end{aligned} \tag{8}$$

(f) ${}^{238}_{94}\mathrm{Pu}$ の $\alpha$ 崩壊による運動エネルギーを $K_{238}$、1 kg の Pu 中の ${}^{238}_{94}\mathrm{Pu}$ 核の個数を $N_{0,238}$、崩壊個数を $\Delta N_{238}$、崩壊熱を $E_{238}$、熱出力を $P_{238}$ とすると

$$\begin{aligned}K_{238} &= \left(1 + \frac{4}{238}\right) \times 5.5\ \mathrm{MeV} \\ &= 5.60\ \mathrm{MeV}, \\ N_{0,238} &= 2.52 \times 10^{24}, \\ \Delta N_{238} &= 1.98 \times 10^{22}, \\ E_{238} &= 1.77 \times 10^{10}, \\ \to P_{238} &= 540\ \mathrm{W}.\end{aligned} \tag{9}$$

(備考 : 質量数が 1 だけしか異ならないのに、崩壊熱による熱出力が約 250 倍も異なるのは驚きである。${}^{238}_{94}\mathrm{Pu}$ は,原子力電池の材料の一つでもあり、原子炉級プルトニウムが核兵器に使えるかどうかの論争において、最も高い発熱源として知られている。例えば、原子燃料政策研究会「原子炉級プルトニウムと兵器級プルトニウム調査報告書」2001 年 5 月．`http://www.cnfc.or.jp/j/proposal/reports/` を参照のこと。)