

1. 電子が幅 10^{-14}m の 1 次元の領域に閉じ込められているとして、原子核に束縛されると仮定された場合の電子の最小の運動エネルギーを MeV 単位で計算せよ。
2. 原子核の表面での電子のおおまかなクーロン・ポテンシャルを MeV 単位で計算し、無限遠方における位置エネルギーと比較せよ。ここで原子核の電荷は $50e$ とせよ。
3. 以上で計算された位置エネルギーと運動エネルギーをもつ電子を束縛するのに十分であるか。

ただし、プランク定数 $\hbar \equiv h/2\pi = 1.0 \times 10^{-34}\text{joule} \cdot \text{s}$ 、電子質量 $m = 0.9 \times 10^{-30}\text{kg}$ 、 $1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \times 10^9\text{N} \cdot \text{m}^2\text{coul}^{-2}$ 、 $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{joule}$ 、 $1\text{MeV} = 10^6\text{eV}$ である。真空の誘電率としては $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{coul}^2$ 、光速は $c = 3.0 \times 10^8\text{m/s}$ を用いよ。

(解答例)

1. 幅 a の 1 次元の領域における電子の運動量の計算には、シュレディンガー方程式を解くか、ド・ブローイ波の定常波条件 ($n\lambda/2 = a$, ($n = 1, 2, \dots$)) のいずれかを使うと波数 k は次のように離散的な値しか許されなくなることがわかる。

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

ド・ブローイの関係より電子の運動量は $p_n = \hbar k_n = n\pi\hbar/a$ となり、その最低値は $p = \hbar\pi/a$ となる。幅 $a = 10^{-14}\text{m}$ として運動エネルギーは相対論的に考えると次のように計算される。

$$K = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (cp)^2} - m_e c^2,$$

$$\begin{aligned} cp &= (3.0 \times 10^8\text{m/s}) \times (1.0 \times 10^{-34}\text{joule} \cdot \text{s}) \times \frac{3.14}{10^{-14}\text{m}} \\ &= \frac{3.0 \times 3.14 \times 1.0}{1.60} \times 10^{8-34+14+19}\text{eV} = 62\text{MeV}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$m_e c^2 = 0.9 \times 10^{-30}\text{kg} \times (3.0 \times 10^8\text{m/s})^2 = 0.51\text{MeV}, \quad (3)$$

$$K \approx cp \approx 62\text{MeV}. \quad (4)$$

2. 原子核の表面での電子のおおまかなクーロン・ポテンシャルの大きさは、幅 $a = 10^{-14}\text{m}$ の半分を半径 r と考えて

$$\begin{aligned} -\frac{50e^2}{4\pi\epsilon_0 r} &= -9.0 \times 10^9\text{N} \cdot \text{m}^2\text{coul}^{-2} \times 50 \times (1.60 \times 10^{-19}\text{coul})^2 \frac{1}{\frac{1}{2} \times 10^{-14}\text{m}} \\ &= -\frac{9.0 \times 50 \times 1.6^2 \times 2}{1.6} \times 10^{9-38+14+19}\text{eV} = -14.4\text{MeV}. \end{aligned} \quad (5)$$

3. 以上で計算された位置エネルギー -14.4MeV は最低の運動エネルギー 62.076MeV をもつ電子を束縛するのに不十分である。

(電子は原子核に束縛されないが、原子核の中でつくれ、 β 崩壊と呼ばれる過程で原子核から放出される。)