核分裂とその連鎖反応

[1] [2] （*印の項目は（やや）詳しい内容．**印の項目はより詳細な内容.）

1　核分裂

1.1　核分裂の発見

核分裂 (nuclear fission) とはウランなど重い原子核が中性子や γ 線, 重陽子を吸収することにより，または自発的に二つまたは三つの原子核に分裂する現象である．ここではまず，中性子を吸収しておこる誘起核分裂を主として考える．

1939 年，ベルリン大学の化学者のハーン（O. Hahn）とシュトラスマン（F. Strassman）が注意深い化学分析により，熱中性子を照射したウランの中からバリウムなど初め含まれていなかったはずの軽い元素を発見した．ベルリン大学時代の共同研究者であったハーンから相談された物理学者のマイトナー [1] は当時スウェーデンに亡命中であったが，甥のフリッシュ[2] とコペンハーゲンでクリスマス休暇を取っていた．二人はスキー場で理論的に検討し，ウランが半分くらいの 2 つの核に分裂する可能性を指摘して，実際に電離箱を用いて核分裂片のつくる大きな電離を観測した．またほとんど同時に，ボーア（N. Bohr）とホイーラー (J. Wheeler)，またフレンケル（Frenkel）が詳しい理論的解析を発表した．二つの分裂片の質量はいろいろな組み合わせが可能で，代表的な例は次のようになる．

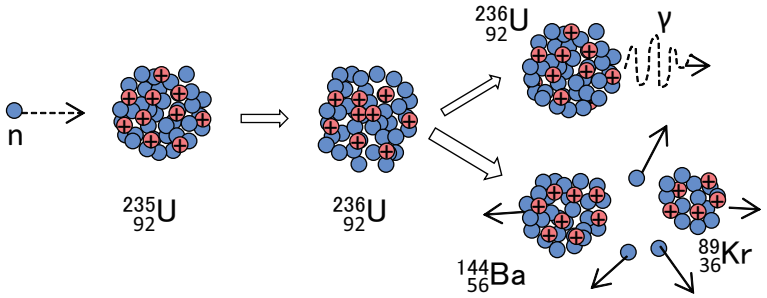

図 1: 熱中性子により誘起される核分裂の一例 (模式図)

$$n +^{235}_{92}\mathrm{U}_{143} \rightarrow [^{236}_{92}\mathrm{U}_{144}]^* \rightarrow^{144}_{56}\mathrm{Ba}_{88} +^{89}_{36}\mathrm{Kr}_{53} + 3n. \tag{1.1}$$

これは驚くべきことであった．というのは，原子分子に比べて，非常に強い力で結合していると考えられてきた原子核が，原子核の世界では無視できる運動エネ

[1] ファイル名=nuclear-fission-text20170110A.tex

[2] 作成者：岡本良治 (九州工業大学名誉教授)．このノートは筆者が大学 3，4 年生向けの「原子力概論」という講義用の資料として作成したものです．興味関心をもつ人に対してもできるだけ自足的に理解でき，独立した立場から客観的な判断材料になれば幸甚です．誤り，説明の分かりにくい点をお気づきの場合，本ファイル名 (特に，作業年月日を示す数値の部分) と該当箇所を特定して，okamoto.ryoji.munakata_at_gmail.com (_at_ を@に修正後）に電子メールで御連絡願えれば幸甚です．

ルギー (平均の値は 0.025eV) しかもたない熱中性子の吸収により分裂したからである！ 多くの通俗的な模式的説明においては，あたかもウラン原子核に侵入する中性子の運動エネルギーにより古典的に分裂するような図が描かれていることと事実は全く異なることに注意するべきである．

ウラン 235 が中性子を吸収したら必ず核分裂するわけではないことに注意すべきである．後に断面積のエネルギー依存性で示すように，一般には中性子を吸収しても，核分裂する場合と，核分裂をせずに γ 線を放出する場合（中性子捕獲反応，capture reaction）がある．核分裂または中性子捕獲の反応の起こる確率はミクロ断面積 $\sigma_{\mathrm{f}}, \sigma_{\mathrm{c}}$ で表わされる．したがって，中性子を吸収して核分裂の起こる相対的確率は $\sigma_{\mathrm{f}}/(\sigma_{\mathrm{f}}+\sigma_{\mathrm{c}})$ となり，熱中性子により誘起されるウラン 235 の核分裂の場合は約 0.85(85%) である．

1.2 誘起核分裂と自発核分裂

その後 1940 年代に発見されたのであるが，外部から中性子入射などにより励起エネルギーを与えなくとも核分裂は生じる場合がある．このような現象を自発核分裂（ spontaneous fission ）という．ウラン，プルトニウム，トリウムのような原子核では自発核分裂を起こす有意の大きさの確率がある．自発核分裂の半減期の例を表に示す．この表のように，ウラン 238 も，小さな割合だが自発核分裂す

${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$	$> 1.5 \times 10^{17}$year	${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$	5.5×10^{15}year
${}^{235}_{92}\mathrm{U}$	1.9×10^{17}year	${}^{240}_{94}\mathrm{Pu}$	1.34×10^{11}year
${}^{238}_{92}\mathrm{U}$	6.5×10^{15}year	${}^{242}_{94}\mathrm{Pu}$	7.1×10^{10}year

表 1: 自発核分裂に対する半減期の例．出典 [17]

る．また．プルトニウム 240 も相対的に大きな確率で核分裂し，この事実が長崎原爆（爆縮型原爆）の作成の契機になった．

1.3 核分裂により発生するエネルギー

1. 核分裂により発生するのはエネルギー，核分裂片などの放射性物質と β , γ 線および中性子などの放射線である．

2. 核分裂により発生するエネルギーは約 200MeV で，約 95%が熱エネルギーに転化する．約 83%以上は核分裂片の運動エネルギーである．

3. 中性子を吸収して,核分裂し，即発 γ 線を放出するまでの時間は $10^{-14} \sim 10^{-13}$s である．

分裂片の運動エネルギー	165 ± 5MeV
即発中性子の運動エネルギー（2-3 本）	5 ± 0.5MeV
即発 γ 線エネルギー（約 5 本）	6 ± 0.5MeV
分裂片からの β 線エネルギー（約 7 本）	8 ± 1.5MeV
分裂片からの γ 線エネルギー（約 7 本）	6 ± 1MeV
分裂片からのニュートリーノのエネルギー（約 7 本）	12 ± 2.5MeV
核分裂の全エネルギー	202 ± 6MeV

表 2: 遅い中性子による U235 の核分裂の平均的なエネルギー配分．出典 [19].

4. 化学反応により解放されるエネルギーとの比較
ここで，比較のために，化学反応のエネルギーにより放出されるエネルギーを計算する．化学反応としては次のように水素の燃焼，すなわち，水素が酸素と化合し水を生成する反応を考える．化学反応式で表すと

$$2\mathrm{H}_2 + \mathrm{O}_2 \rightarrow 2\mathrm{H}_2\mathrm{O} \tag{1.2}$$

である．水素が酸素と化合し水を生成する反応が実際に進むということは，水素分子と酸素分子が別々に存在する状態に比べ，水分子となった状態のほうがエネルギー的に有利であるからである．この反応により生じる熱 (燃焼熱) は 284kJ/mol[6] である．アボガドロ数 N_a を $N_\mathrm{a} = 6 \times 10^{23}$/mol として，この燃焼熱を 1 分子当たり，電子ボルト単位に換算すると

$$\begin{aligned} \frac{284\ \mathrm{kJ}}{N_\mathrm{a}} &= \frac{2.84 \times 10^5}{6 \times 10^{23}} \times \frac{\mathrm{eV}}{1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 2.96\ \mathrm{eV} \end{aligned} \tag{1.3}$$

となる．1 回の核分裂で解放されるエネルギーを 1 回の化学反応で解放されるエネルギーを単純に割ると同じ質量当たり約 670 万倍ということになる．
備考：
通常の燃焼においては種々の素材と種々の連鎖反応が関与し，鉱物の中での有用成分の含有率も考慮するべきであるから，単純な比較はできない．ここでは概略として要素的過程において解放されるエネルギー比は約 100 万倍程度としておく．出力密度 (単位体積または単位面積当たり発生するエネルギー) は大きい方が燃料コストだけは経済的であるが，制御に失敗した場合のリスクも比例して大きく，安全性確保のための装置費用等の面で自ずと限度がある．核分裂連鎖反応や原発の経済性を他の方法と比較して評価する場合には長所だけではなく，関連したリスクの大小も考える必要がある．

1.4 核分裂性核種と親物質

核分裂を起こすものは特定の核種に限られる．原子炉の核燃料として実際に使用されるものは U, Pu, Th の同位核であり，これらは質量数が奇数であるか偶数であるかによって核分裂性が異なる．これは，偶数個の核子が対をつくる傾向があるなど原子核が超伝導状態になっていることに起因している．

奇数の質量数をもつ ${}^{233}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$, ${}^{241}_{94}\mathrm{Pu}$ を，原子炉工学では核分裂性核種（fissile nuclide），またはその物質を核物質（fissile material/fissionable material）という．

偶数の質量数をもつ ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$, ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{240}_{94}\mathrm{Pu}$ を親物質または核原料物質（fertile material）という．これらは高エネルギーの中性子によって核分裂を起こすこともあるが，原子炉内では主として中性子を捕獲し，次のように核反応とベータ崩壊を経由して，核分裂性物質となる．

$$ {}^{232}_{90}\mathrm{Th}(n,\gamma){}^{233}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\beta^-,22\mathrm{m}} {}^{233}_{91}\mathrm{Pa} \xrightarrow{\beta^-,27.4\mathrm{d}} {}^{233}_{92}\mathrm{U} \tag{1.4} $$

$$ {}^{238}_{92}\mathrm{U}(n,\gamma){}^{239}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta^-,23\mathrm{m}} {}^{239}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta^-,2.3\mathrm{d}} {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} \tag{1.5} $$

$$ {}^{240}_{94}\mathrm{Pu}(n,\gamma){}^{241}_{94}\mathrm{Pu}. \tag{1.6} $$

ここで，m, d はそれぞれ分，日という時間単位を表す．核分裂性物質のうち天然に存在するのは ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ だけで，他は原子炉内でつくられる．

備考:

1. ${}^{240}_{94}\mathrm{Pu}$ は自発核分裂する確率も小さくない.（この事実が長崎型原爆（爆縮型原爆）の開発の契機となった.）

2. 原子核物理学では，核子から構成される無限一様に広がった理想的な物質をを核物質（nuclear matter）という．

1.5 核分裂生成物とその放射線及び崩壊熱

核分裂に伴って発生する核分裂生成物と放射線の性質について考える．中性子については別項でより詳しく触れ，ここでは放射線としては中性子以外を考える．

1. 核分裂片は運動量保存則とエネルギー保存則を同時に満たすように運動し，重い方は質量数は約 140，陽子数は約 54，運動エネルギーは約 65MeV, そして軽い方は質量数は約 90，陽子数は約 38，運動エネルギーは約 97MeV であり，光速度の約 30 分の 1 くらいの高速である．また，二つの分裂片を核とする原子の電子は部分的に剥ぎ取られて，約＋ $20e$ 程度に帯電した重い荷電粒子となる．

2. 核分裂片の運動エネルギーは核分裂する点から数ミクロン（μm）から 0.5×10^{-3}cm の距離内で失われ，熱に変わる．ウラン塊の中では約 10^{-9}sec で静止してしまう．

3. β 線のエネルギーは数センチ（cm) 以内で失われ，熱に変わる．

4. γ 線のエネルギーは数メートル（m) 以内で失われ，熱に変わる．

5. 中性微子 (ニュートリーノ ν) は物質粒子とほとんど相互作用をしない, すなわちエネルギーとしても利用できず，はるかかなたへ飛んで行く．

6. 核分裂片は運動エネルギーを失った後も，相当の時間にわたって励起状態であり，ガンマ線，ベータ線やまたまれに中性子（遅発中性子）を放出する．ガンマ線，ベータ線は周囲の物質との相互作用により熱に変わるので，この熱を崩壊熱（decay heat）という．このようにして発生する崩壊熱は原子炉の停止直後にもかなりの熱 (熱出力の約 8%) となり，その除去が非常に重要となる．[3]

7. 核分裂により生成される原子核を運動エネルギーをもっている状態の時に，分裂片 (fission fragments) といい，運動エネルギーをもたなくなった状態を分裂生成物 (fission products, F. P.) と区別することがある．

8. 核分裂生成物の崩壊系列核分裂生成物は，安定性の上から，すなわち核子あたりの結合エネルギーの質量数依存性，陽子数依存性により，中性子が相対的に多すぎるので，ベータ崩壊を行い，多くの場合続いて何回かのベータ崩壊をする．このようなベータ崩壊の系列を，分裂崩壊系列 (fission decay chain) という．

   - 分裂崩壊系列の長い例：

$$ {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} \xrightarrow{\beta^-,16\mathrm{s}} {}^{140}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow{\beta^-,66\mathrm{s}} {}^{140}_{56}\mathrm{Ba} \xrightarrow{\beta^-,12.8\mathrm{d}} {}^{140}_{57}\mathrm{La} \xrightarrow{\beta^-,40\mathrm{h}} {}^{140}_{58}\mathrm{Ce}(\text{安定}) \tag{1.7} $$

   - 分裂崩壊系列の短い例:この系列で Pm(プロメシウム) が発見された．

$$ {}^{147}_{60}\mathrm{Nd} \xrightarrow{\beta^-,11\mathrm{d}} {}^{147}_{61}\mathrm{Pm} \xrightarrow{\beta^-,2.6\mathrm{y}} {}^{147}_{62}\mathrm{Sm}(\text{半減期} \approx 10^{11}\mathrm{y}) \tag{1.8} $$

   - 自然界に存在しない ${}^{99}_{43}\mathrm{Tc}$ は次の系列において発見された．

$$ {}^{99}_{42}\mathrm{Mo} \xrightarrow{\beta^-,66\mathrm{h}} {}^{99}_{43}\mathrm{Tc} \xrightarrow{\beta^-,2.12\times10^5\mathrm{y}} {}^{99}_{44}\mathrm{Ru}(\text{安定}) \tag{1.9} $$

核分裂生成物収率の質量数依存性を図 2 に示す．図 2 から分るように，熱中性子により誘起された核分裂ではまっ二つに分裂する割合は非常に小さい．しかし，高エネルギー ($E_n = 14$ MeV) の中性子により誘起された核分裂ではまっ二つに分裂する割合が二桁ほど増加するが，それでも全体の約 1% に過ぎない．この意味においても，核分裂は運動エネルギーによる古典的な分裂とは質的に異なる．

主な核分裂生成物の収率を図 3 に示す．収率の合計は 200%になっていることに注意する．

[3] 2011 年 3 月 11 日から始まった福島第一原発事故の中心的なことは，地震動と津波の複合的影響が発端的事象となり，崩壊熱の制御に失敗して，炉心が溶融したことである．

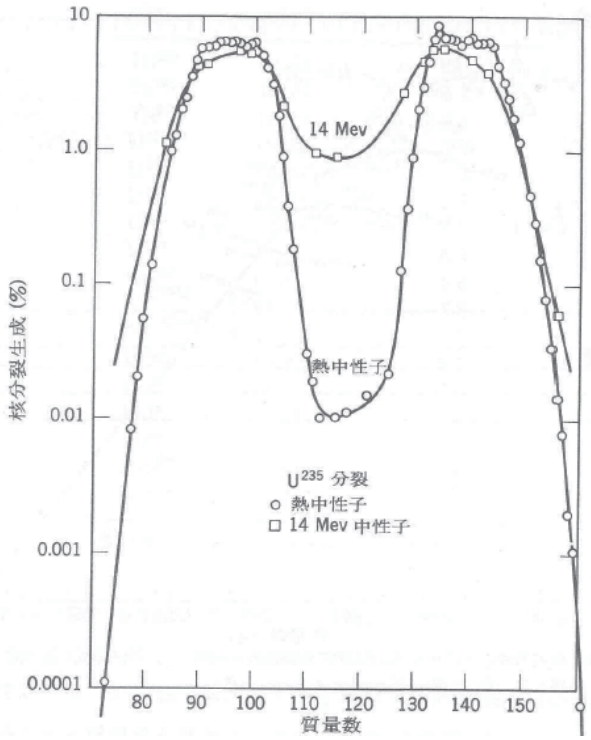

図 2: 核分裂生成物収率の質量数依存性．出典 [15].

1.6 核分裂に伴って発生する中性子とそのエネルギー・スペクトル

1. 即発中性子と遅発中性子
   核分裂に伴って放出される高速の中性子には実は二種類ある．ひとつは即発中性子（prompt neutron）であり，他は遅発中性子（delayed neutron）である．即発中性子は全放出中性子数の 99%以上を占め，核分裂とほぼ同時に（約 10^{-14} 秒後）放出される．一方，遅発中性子は全放出中性子数の 1%以下の小量で，核分裂の後ある時間経過後に放出される．

2. 核分裂中性子のエネルギー分布と平均エネルギー
   即発中性子はいずれも高速であるが，図 4 に示すように，そのエネルギー範囲は広がっていて，0.05MeV から 7MeV 以上のものまであり，その平均値は約 2MeV である．

3. 遅発中性子とその役割
   遅発中性子は全放出中性子数の 1%にも満たない数しかないが，後に議論するように，原子炉の制御を容易にしている点で実用的な意味が大きい．

   遅発中性子はなぜ発生するのだろうか．遅発中性子が放出される理由は，核分裂直後，分裂片が余分のエネルギーをもち，また安定性の点から多すぎる中性子をもつためと考えられる．重要なものは核分裂片の臭素 Br とヨウ素

生成物	U-235の収率	Pu-239の収率	半減期	備考
Cs-133	6.70 %	7.02 %	安定	一部は中性子捕獲により，半減期約2年のCs-134になる
Cs-137	6.19	6.61	30.17y	
I-129	0.543	1.37	15.7My	
I-131	2.83	3.86	8.02d	
I-135	6.28	6.54	6.57h	この核種のベータ崩壊で生成するXe-135は原子炉中で最も主要な毒性物質で、10-15%が中性子捕獲でXe-136になり、残りは半減期9.14hでCs-135になる。
Zr-93	6.30	3.80	1.53My	
Tc-99	6.05		211ky	
Sr-89	4.73	1.72	50.53d	
Sr-90	5.75	2.10	28.9y	
Xe-133	6.70	7.02	5.25d	
Pm-147	2.27		2.62d	
Sm-149	1.09	1.22	安定	主要な毒性物質の一つ

図 3: 主な核分裂生成物とその収率．出典 [16]．他の文献 [17, 18] では収率の大きさに若干の差違がある．

I の崩壊に関連している．次の式に示すように，

$$
\begin{aligned}
{}^{87}_{35}\mathrm{Br} &\rightarrow {}^{87}_{36}\mathrm{Kr}(\text{基底状態}) \\
&\rightarrow {}^{87}_{36}\mathrm{Kr}^{*}(\text{励起状態}) \rightarrow {}^{86}_{36}\mathrm{Kr} + n
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

${}^{87}_{35}\mathrm{Br}$ の一部は，β 崩壊の後，基底状態の ${}^{87}_{36}\mathrm{Kr}$ になり，引き続き β 崩壊を行う．しかし，残りはまず，${}^{87}_{36}\mathrm{Kr}$ の励起状態になり，1 個の中性子を放出して安定な ${}^{86}_{36}\mathrm{Kr}$ となる．この中性子が遅発中性子と呼ばれる．

核分裂生成物のうち，遅発中性子を放出するものを遅発中性子先行核 (delayed-neutron precursor) または単に先行核 (precursor) という．約 20 種の先行核が存在すると考えられ、その大半が存在することが確認されていて，半減期の長さに応じて，6 群に分類されている ([40],p.89).

（追加予定!!）遅発中性子に関する情報

1.7 核分裂の断面積の中性子エネルギーへの依存性

熱中性子以外のエネルギーの中性子では分裂しないのかどうか，核分裂性物質 (元素）の U-235,U-233 および Pu-239 の間の違いはどうか，天然ウランの大部分を占める U-238 は分裂しないのかどうか．まず，U-233,U-235,U-238,Pu-239 の, 中性子により誘起される核分裂の断面積のエネルギー依存性の全体的特徴を図 5 に示す．図 5 より， U-233, U-235 と Pu-239 は低エネルギーから高エネルギー中性子に対して，核分裂の断面積は有意の値を持っているので，これらの核種は核分

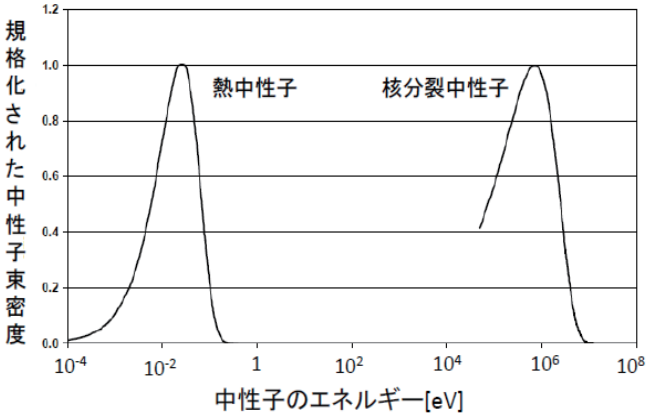

図 4: 核分裂中性子と熱中性子のスペクトル．出典 [51] より作図．

群	半減期 T_i[s]	崩壊定数 λ_i[s^{-1}]	中性子エネルギー E_i[keV]	収率 Y_i	割合 β_i
1	55.72	0.0124	250	0.00052	0.000215
2	22.72	0.0305	560	0.00346	0.001424
3	6.22	0.111	405	0.00310	0.001274
4	2.30	0.301	450	0.00624	0.002568
5	0.610	1.14	-	0.00182	0.000748
6	0.230	3.01	-	0.00066	0.000273

表 3: 熱中性子による U235 の核分裂遅発中性子データ．出典 [40], p. 90. 収率 Y_i(yield): 核分裂あたりの中性子数，割合 β_i:核分裂により発生する，全ての中性子数に対する i 番目の遅発中性子群に属する全中性子数の割合．全収率 $Y \equiv \Sigma_{i=1}^{6} = 0.0158$. 全遅発中性子数割合 β は β_i の総和，$\beta \equiv \Sigma_{i=1}^{6}\beta_i = 0.0065$.

裂性物質と言われる．対照的に，U-238 の核分裂の断面積は 1 MeV 以上の中性子に対してのみ有意の大きさになる．

次に，中性子と個別の原子核の核反応の断面積のエネルギー依存性の詳細を見ていく．U-235 の核分裂の断面積のエネルギー依存性を図 6 に示す．図 6 に示されているように，原子炉で重要になる熱中性子領域 ($E_n \approx 0.024$ eV）では核分裂の断面積は $\sigma_{\rm f} \approx 600$ b にも達し，他の種類の反応の断面積の値よりはるかに大きいが，MeV 級の高エネルギー領域では高々，数 b 程度の大きさに留まるが，ゼロではない有意の値である．核爆発 (爆発的連鎖反応）の場合，高エネルギー領域の性質が重要となる．

また，中性子が 3 個多い U-238 の断面積のエネルギー依存性を図 7 に示す．U-235 の場合と対照的に，熱中性子領域 ($E_n \approx 0.024$ eV）から広いエネルギー範囲にわたり，$\sigma_{\rm f}$ の値は数 mb 程度以下で，無視できる，すなわち，U-238 は分裂しない，と考えてよい．

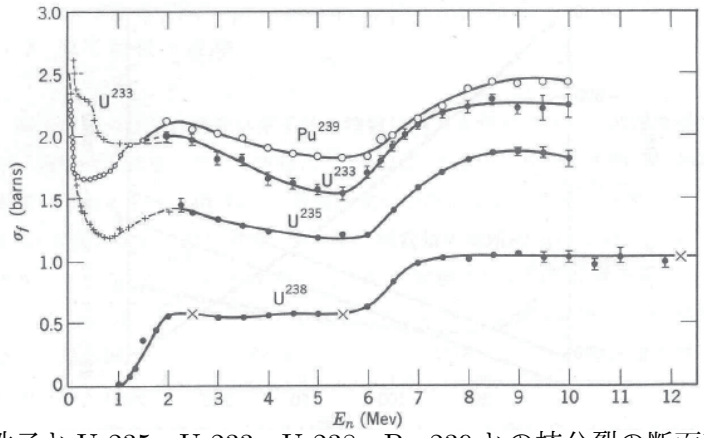

図 5: 中性子と U-235，U-233，U-238，Pu-239 との核分裂の断面積のエネルギー依存性．出典 [15]．

コメント：しかし，MeV 級の高エネルギー領域では，数 b 程度の大きさになるので，有意の効果がある．これは原子炉における核分裂連鎖反応に中性子供給源の脇役のひとつ（= U-238 の高速中性子により誘起される核分裂）として有意の効果があることを示唆する．また，MeV 級の高エネルギー領域の中性子が大量に存在し，かつ U-238 が大量に存在すれば，U-238 の高速中性子により誘起される核分裂エネルギーの寄与は有意の大きさとなり得ることを示唆する．（これは歴史的には，水爆と通俗的に解釈されている核爆発の一様式にも活用されたことが知られている．）

さらに，Pu-239 の核分裂の断面積のエネルギー依存性を図 8 に示す．U-235 の場合と比較して，熱中性子領域 ($E_n \approx 0.024$ eV）から広いエネルギー範囲にわたり，σ_{f} の値はかなり大きく，核分裂性物質 (fissile material) としては優れている，と言える．

最後に，U-233 の断面積のエネルギー依存性を図 9 に示す．図 9 より，U-233 の断面積のエネルギー依存性は U-235 と非常に類似していることが分る．U-233 はトリウム (Th-232) を親物質として生成され，これを用いた原子炉型はトリウム原子炉またはトリウム溶融塩炉と呼ばれ，研究開発されていた [8, 9, 10, 11, 12]．

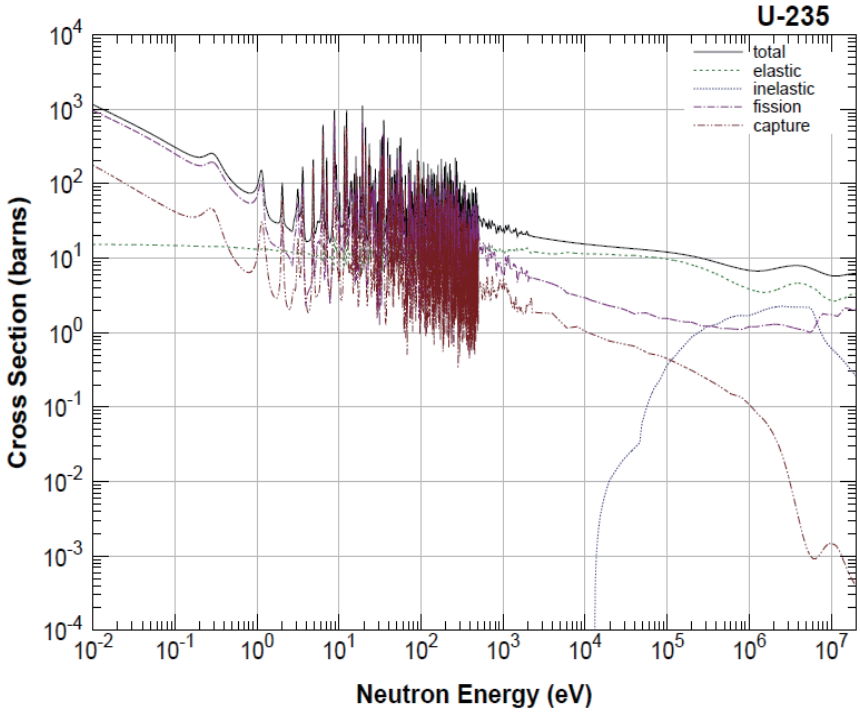

図 6: 中性子と U-235 との核反応の断面積のエネルギー依存性．出典 [7]．Cross Section=断面積，Neutron Energy=中性子の入射エネルギー，elastic=弾性散乱の断面積 σ_{el}, inelastic=非弾性散乱の断面積 σ_{inel}，fission=核分裂の断面積 σ_{f}，capture=中性子捕獲の断面積 σ_{c}，total=$\sigma_{\mathrm{f}} + \sigma_{\mathrm{c}} + \sigma_{\mathrm{el}} + \sigma_{\mathrm{inel}}$

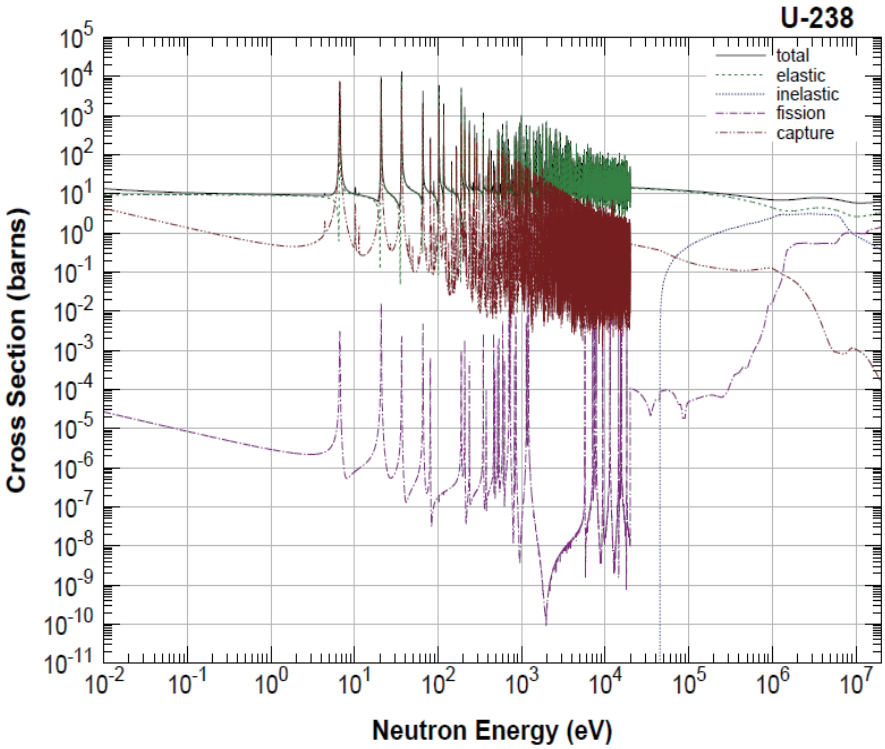

図 7: 中性子と U-238 との核反応の断面積のエネルギー依存性．出典 [7]．説明は図 6 参照のこと．

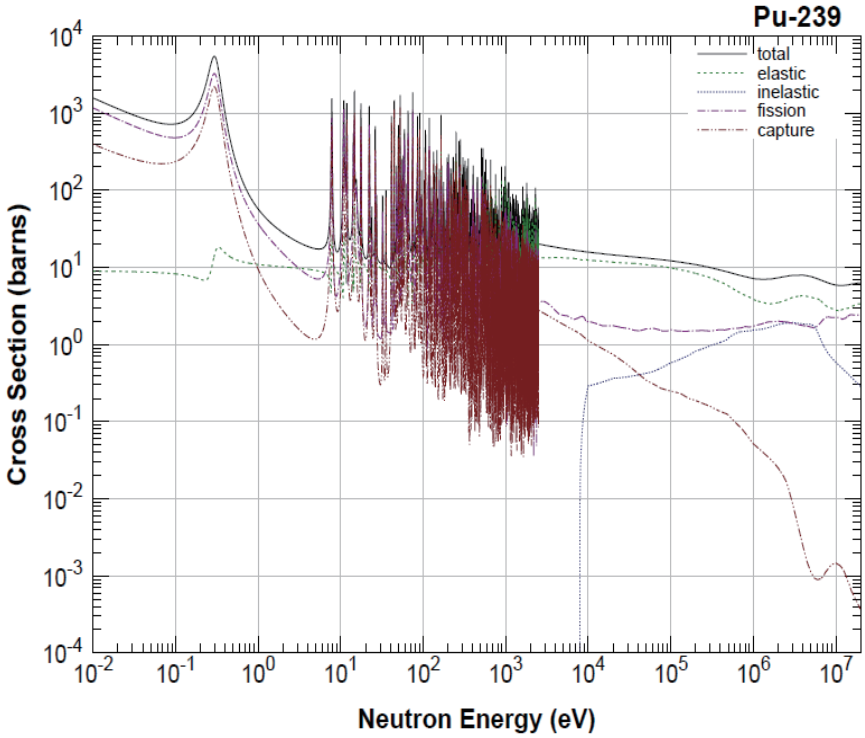

図 8: 中性子と Pu-239 との核反応の断面積のエネルギー依存性．出典 [7]．説明は図 6 参照のこと

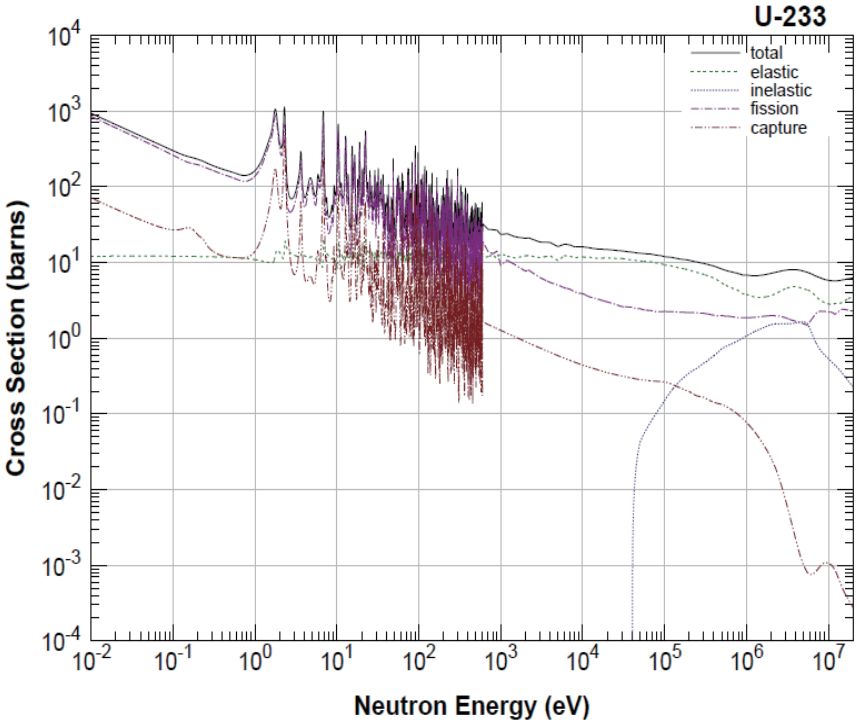

図 9: 中性子と U-233 との核反応の断面積のエネルギー依存性．出典 [7]．説明は図 6 参照のこと

1.8 ＊核分裂の機構

1936 年に結合エネルギーの半経験公式が発表され，あるいは核子数あたりの結合エネルギーの大きさは鉄の領域で最大になること，すなわち，重い核は二つに分裂した方がエネルギー的に得すること，すなわち，核分裂が理論的に予想できたはずだが，1939 年の核分裂の発見まで誰も気づかなかった．

結合エネルギーの半経験的公式を用いて, 核分裂により開放されるエネルギーの大きさを推定してみよう．簡単のために，質量数 A，陽子数 Z の原子核が真っ二つに分裂する場合の結合エネルギーの変化分 Q を

$$Q \equiv E_{\mathrm{B}}(A/2, Z/2) \times 2 - E_{\mathrm{B}}(A, Z) \tag{1.11}$$

と定義する．この Q の値がプラスであれば，もし核分裂すれば，それによりエネルギーが解放されることを意味する．別項 (原子核の基本的性質）[13] で説明したように，結合エネルギーの半経験的公式は, 例えば, 次のように与えられる．

$$E_B(A, Z) = c_v A - c_s A^{2/3} - c_a \frac{(N-Z)^2}{A} - c_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \delta(A, Z). \tag{1.12}$$

ここで右辺の各項の係数は次のように与えられる [14]：

$$c_v = 15.56\mathrm{MeV},\ c_s = 17.23\mathrm{MeV},\ c_a = 23.285\mathrm{MeV},\ c_c = 0.697\mathrm{MeV}, \tag{1.13}$$

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} \frac{130}{A}\mathrm{MeV} & (Z, A \text{ ともに偶数}) \\ 0 & (A \text{ が奇数}) \\ -\frac{130}{A}\mathrm{MeV} & (Z, A \text{ ともに奇数}) \end{cases}$$

さらに，$\delta(A, Z)$ の大きさは高々0.5 MeV 程度の大きさであるから無視すると

$$\begin{aligned} Q &= \left[C_v \frac{A}{2} - C_s \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} - C_c \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{\left(\frac{A}{2}\right)^{1/3}} \right] \times 2 - \left[C_v A - C_s A^{2/3} - C_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right] \\ &= C_s A^{2/3}(1 - 2^{1/3}) + C_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

となる [15]．式 (1.11) の右辺の第 1 項はマイナスの値で，第二項はプラスの値である．このことから，陽子集団間のクーロン斥力エネルギーが相対的に強ければ，核分裂によりエネルギーが解放されることを意味する．ここで，$A = 235,\ Z = 92$ を代入すると

$$\begin{aligned} Q &= 17.23 \text{ MeV} \times 38.08 \times (-0.26) + 0.697 \text{ MeV} \times 1371.6 \times 0.37 \\ &= -170.06 \text{ MeV} + 352.7 \text{ MeV} \\ &\approx 180 \text{ MeV} \end{aligned} \tag{1.15}$$

が得られる．

液滴模型による中性子により誘起される核分裂の機構の理解：

1. 核力の引力部分は原子核の形状を球形に保とうとするが，陽子間のクーロン斥力は変形させようとする．

2. 基底状態にある原子核においては，原子核のポテンシャルには変形に対しては安定であり，不安定になる敷居値エネルギーというポテンシャル障壁が存在する．

3. これらの競合する要因に (熱) 中性子の吸収の結果生じる結合エネルギーの余剰部分 $\Delta E_B \equiv E_B(A+1,Z) - E_B(A,Z)$ の値が敷居値エネルギーを越える場合には核分裂が起こる．

核分裂への量子効果.

2 核分裂連鎖反応

2.1 核分裂連鎖反応と臨界条件

ここで，核分裂というミクロな世界における要素的な過程がマクロな量の核エネルギーの解放となる核爆発と原子炉と臨界事故を簡単に，かつ統一的に理解してみよう．

1. **増倍係数と臨界，臨界超過，臨界未満**

   連鎖反応の程度を定量的に評価する基本的な物理量を増倍率 (multiplication factor, reproduction constant) といい，原子核工学 (原子力工学）などの分野では k と記し，ある世代における核分裂数 (あるいは核分裂中性子数) を，その一世代前の核分裂数 (あるいは核分裂中性子数) で割ったもので，次式で定義される．

   $$k \equiv \frac{\text{ある世代における核分裂数 (あるいは核分裂中性子数)}}{\text{その一世代前の核分裂数 (あるいは核分裂中性子数)}}. \quad (2.16)$$

   ウランやプルトニウムのような核燃料が一カ所に集まり，ある条件が整うと核分裂反応が次から次に起こる状態，すなわち核分裂連鎖反応が持続的に起こる状態になる．時間が経っても核分裂の数が一定である状態 ($k=1$) を「臨界状態」という．核分裂の数が時間とともに増加していく状態 ($k>1$) を「臨界超過」または「超臨界状態」，減少していく状態 ($k<1$) を「臨界未満」または「未臨界状態」という．

   すでに述べたように，核分裂に伴って発生する中性子には核分裂とほぼ同時に発生する即発中性子と，やや時間経過して，核分裂生成物から放出される遅発中性子がある．即発中性子による臨界を即発臨界，遅発中性子による臨界を遅発臨界と呼ぶ.

臨界を越えた超過分が中性子数の増加率にして約 0.8%程度までならば，中性子数の増加速度は遅く，制御装置で増大を抑える時間的余裕がある（遅発臨界）．しかし，中性子数の増加率にして約 0.8%を越えると，中性子増加速度は突然速くなり，制御装置の有無に関係なく制御できない状態となる（即発臨界）．

2. **原子炉は臨界状態：$k = 1$**
原子力発電では，水を循環させた鋼鉄製の容器の中に規則正しく並べられたウランやプルトニウムの核燃料棒で熱エネルギーが作られ，その熱エネルギーによって高温になった水から得られる高圧の水蒸気でタービンを回して発電している．すなわち，多数の燃料棒の中に水を送り込んで高温高圧の水蒸気を生み出す装置が原子炉である．そして，水と燃料棒から構成される構造物を原子炉の炉心と呼んでいる．炉心では，核分裂連鎖反応が一定の割合で継続しており，必要なエネルギーを生成している．すなわち，原子炉では定められた電力量を供給できるように核分裂連鎖反応を制御して臨界状態を保っている．さらに，通常の原子炉（軽水型熱中性子利用原子炉）では熱中性子による核分裂の確率の大きいウラン 235 の濃縮率は $2 \sim 2-3\%$ である．

   原子炉では即発中性子と遅発中性子の総数が熱中性子まで減速されて制御され，緩やかに臨界が続いている．

   通常の状態では原子炉の臨界は遅発臨界である．

3. **核兵器は臨界超過状態を利用したものである：$k > 1$ ．**
核分裂連鎖反応をできるだけ短い時間内に起こさせ，強烈な爆発力を発生させるものである．すなわち，核兵器の臨界超過状態ではできるだけ大きなエネルギーを短時間に発生させることを目的としている．これらの核兵器には金属状の濃縮ウランやプルトニウムが用いられている.（発電用原子炉の燃料は金属の形態ではなく，酸化物を焼き固めたものを金属の鞘に詰めたものである）．兵器に使用されるウラン 235 の濃縮率は，原子炉用の低濃縮ウランと異なり，90% 以上の高濃縮ウランが使用される．しかし，中程度の濃縮ウランでも爆発効率の低い核爆発を起こすことは可能であるという見解もある．

   原爆（核分裂兵器）では，高速の即発中性子による臨界超過状態で核分裂のエネルギーを極短時間に一挙に放出するようになっている．

   核分裂兵器における臨界は即発臨界であり，原子炉と同じ意味の制御は不可能となる．

4. **原子炉以外の施設は臨界にならない設計を義務づけられている．**
これらの施設では間違っても一定量以上の核燃料が一カ所に集まって臨界にならないよう臨界安全管理を行なうことが法律で義務づけられている．しかし，核分裂性物質が何らかの原因で集積すれば原理的には核分裂（連鎖反応）

が起こりうること，その場合も想定した対策は必要である．臨界事故が発生した場合を想定し，臨界を速やかに終息させることができるように，溶液状核燃料を別の安全な貯槽に移したり，核分裂連鎖反応の仲介役の中性子をいち早く吸収して核分裂反応を抑制する作用のあるほう酸水溶液などを非常用に備えている場合もある．

5. **臨界事故とは期せずして臨界超過になってしまった状態を指す：$k > 1$**
   臨界超過状態をそのままにしておくとその核燃料の状態に応じて様々だが，大量のエネルギーが熱や放射線（中性子線，ガンマ線，ベータ線）の形で放出されることになる．

   臨界事故の場合には，即発臨界と遅発臨界の両方が現れることが過去の事故例で確認されている．即発臨界の場合には，核分裂性物質を含む溶液などの装置または容器内で急激に温度が上昇し，気泡ができるバースト現象が起こる．火薬の爆発とは異なるが，場合により臨界を起こした装置または容器が吹き飛ぶ可能性もある．1999 年 9 月の東海ウラン臨界事故では最初の大量の中性子線は即発臨界によるものであったが，その後は遅発臨界が約 20 時間ほど続いた [20, 21, 22]．

2.2 高速中性子誘発による核分裂連鎖反応の臨界量

核分裂連鎖反応について，具体的イメージをもってもらうために，高速中性子誘発による核分裂連鎖反応の臨界量の具体的な値と定性的な推定法を説明する．

核分裂において中性子の発生数は核分裂性物質の体積に比例する，すなわち半径の 3 乗に比例する．一方，系外に漏洩する中性子数は表面積に比例する，すなわち半径の 2 乗に比例する．したがって，自立的な核分裂連鎖反応が実現される最小量（臨界量，critical mass）が存在する．

臨界量は

1. 核分裂性物質を含む材料の密度
2. 核分裂性物質を含む材料の純度（濃縮度）
3. 反射体（の存否，性能）

の条件で決まる．臨界量の密度依存性については後述する．他の物質の混在が少ないほど，中性子が核分裂を起こさずに不純物と核反応を起こして無駄に使用される確率が小さくなる．したがって，純度（濃縮度）が高くなるほど臨界量は小さくなる．

表 4 に示されているように，臨界量は中性子の反射体があるかないか，また反射体の性能により種々の値をとる． 実際の核爆発装置においては様々な工夫がな

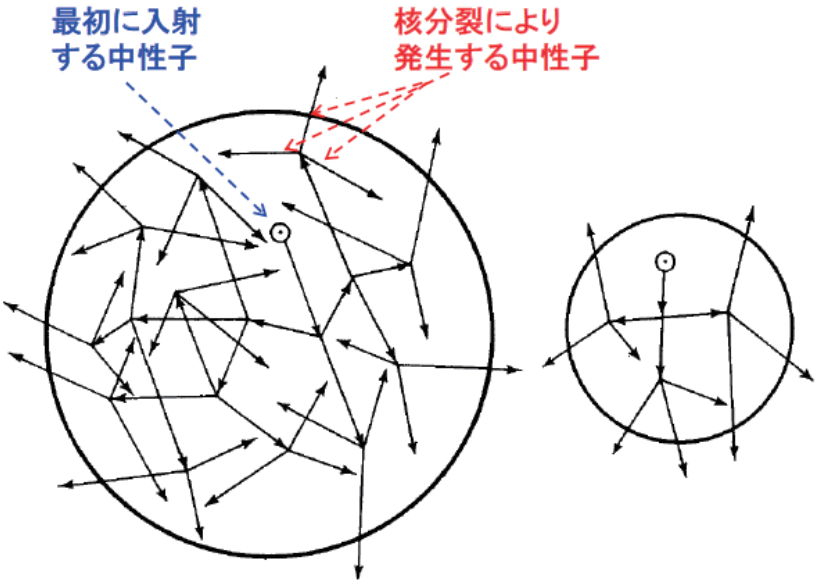

図 10: 核分裂性物質の大きさの増加により中性子漏洩が減少する効果．出典:[23] の図 1.48 より作図．

されているであろう．

臨界量の簡単な推定法

核分裂性物質中での中性子の平均自由行程をこの核分裂性物質のサイズ (例えば半径）とする．連鎖反応が実現するための臨界条件は新たに発生する中性子が系外に飛び出す前に最低ちょうど 1 個の中性子を発生させることである．簡単のため，核分裂性物質の純度は 100% と仮定する．

1. 1 回の核分裂により平均して ν 個の中性子が発生するとすれば，連鎖反応の次の世代の中性子がまだ核分裂していない原子核に吸収されると，中性子を吸収して，核分裂を起こすか，γ 線を放出して原子核の基底状態に留まる反応（＝中性子捕獲反応）のいずれかになる．核分裂のミクロ断面積を σ_{f}，中性子捕獲反応のそれを σ_{c} と記すと，次の世代の核分裂には次式で定義される η 個の中性子が利用可能となる．

$$\eta \equiv \left(\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{\sigma_{\mathrm{f}}+\sigma_{\mathrm{c}}}\right)\nu \tag{2.17}$$

2. まだ核分裂していない原子核に 1 個吸収され，η 個の中性子が発生するので，連鎖反応の 1 世代ごとに $(\eta-1)$ 個の中性子が新たに生成される．連鎖反応が続くためには，これら $(\eta-1)$ 個の中性子が系の外に飛び出す前に少なくとも一回以上，すなわち，それぞれの中性子は $1/(\eta-1)$ 回の核分裂を起こさなければならない．

3. 中性子と原子核の核分裂の平均自由行程を λ_{f} とすれば，中性子が距離 R を走行する間に，平均して R/λ_{f} 回の核分裂が起こる．平均自由行程 λ_{f} は単位

核種	反射体	厚さ（cm）	臨界量（kg）
ウラン 235	なし		49
ウラン 235	ベリリウム	10	14
ウラン 235	天然ウラン	10	18
プルトニウム 239	なし		12.5
プルトニウム 239	ベリリウム	5.2	5.4
プルトニウム 239	ベリリウム	32	2.5
プルトニウム 239	天然ウラン	5	6.4
プルトニウム 239	天然ウラン	24	4.4

表 4: 高速中性子による核分裂連鎖反応の臨界量（通常の密度の場合）．出典 [24]

体積中の核分裂性原子核の個数 (=原子核の数密度)n と核分裂の断面積 $\sigma_{\rm f}$ とすれば，$\lambda_{\rm f} = 1/(n\sigma_{\rm f})$ と表される．

4. 以上より，R の最少値が臨界半径 $R_{\rm cr}$ であると解釈すれば臨界半径 $R_{\rm cr}$ は次の関係式を満たさねばならない．

$$\frac{R_{\rm cr}}{\lambda_{\rm f}} = \frac{1}{\eta - 1} \rightarrow R_{\rm cr} = \frac{1}{n\sigma_{\rm f}(\eta - 1)}. \tag{2.18}$$

5. 核分裂性の原子核の質量を m，グラム原子量を M，アボガドロ数を $N_{\rm a}$ とすれば，この中の原子核の個数 $N = (m/M) \times N_{\rm a}$ である．核分裂性物質の密度を ρ とすれば，この原子核の数密度 n は次のようにと書ける．

$$n = \frac{\rho}{M} N_{\rm a}. \tag{2.19}$$

6. 式 (2.18）に式 (2.19) を代入すると，臨界半径 $R_{\rm cr}$ は次のように書き直せる．

$$R_{\rm cr} = \frac{M}{N_{\rm a} \cdot \sigma_{\rm f}(\eta - 1)\rho}. \tag{2.20}$$

7. 核分裂性物質を球状であるとすれば，臨界量 $M_{\rm cr}$ は

$$M_{\rm cr} = \frac{4\pi[R_{\rm cr}]^3}{3}\rho = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{M}{N_{\rm a}}\right)^3 \frac{1}{[\sigma_{\rm f}]^3(\eta - 1)^3\rho^2} \tag{2.21}$$

と表される．式 (2.20) と式 (2.21) の表現は核分裂性物質の物性値である密度 ρ を用いている点で，臨界半径，臨界量の密度や濃縮度への依存性をより明示的に表しているので，式 (2.20) より優れていると言える．

これらの関係式は近似的にしか成立しないので，その妥当性を吟味する必要があるだろう．そこで例えば，エネルギー 2 MeV 程度の高速中性子に対するウラン 235 とプルトニウム 239 の核分裂を考える．

1. ^{235}U:$\rho = 19.04\mathrm{g/cm}^3, \eta = 2.5,\ \sigma_\mathrm{f} = 1.4$ barn を代入すると

$$R_\mathrm{cr} \approx 9.76\ \mathrm{cm},\ M_\mathrm{cr} \approx 74.1\ \mathrm{kg}, \tag{2.22}$$

2. ^{239}Pu:$\rho = 19.8\mathrm{g/cm}^3, \eta = 3.0,\ \sigma_\mathrm{f} = 2.2$ barn を代入すると

$$R_\mathrm{cr} \approx 4.54\ \mathrm{cm},\ M_\mathrm{cr} \approx 7.8\ \mathrm{kg}, \tag{2.23}$$

このように，定性的な導出法にしては表 4 に掲載された値に近い, 少なくとも遠くはない値が得られる．

ここで注目すべきことは，核分裂反応の特性を示す物理量 σ_f, η の値を比較すると，プルトニウムがより優れた材料であること（同じ質量であれば爆発威力はより大きいこと），および臨界半径が密度に反比例すること，臨界量が密度の 2 乗に反比例することである．すなわち，何らかの方法で圧縮することができれば臨界量は大幅に減少する．例えば，密度が半分になれば臨界量は 4 分の 1 になる！

3 *連鎖反応の理論 (加筆中)

核分裂連鎖反応，すなわち原子炉物理学に関する，既存の多くの書籍 [26, 27, 28, 29, 30, 31, 36, ?, 39, 40, 43] には多岐にわたる事項が詳細に記述，説明されているが，初学者または非専門家には必ずしも分かりやすくはない．ここでは，現在，通常運転中の原子炉 (軽水減速熱中性子炉，略称，軽水炉）だけではなく，高速炉や臨界事故，再臨界現象や核爆発の理解もしやすいように，学習の順序を考える．フェルミ [26, 27] が先駆的に採用したように，できるだけ物理的本質を含むように手計算が可能なように (解析解が存在する）近似的なモデルから出発する [44]．[4]

いくつかの指標または自由度で構成された原子炉物理学の学習・理解（認知）の地図を図 11 に示す．

- 臨界状態にある原子炉は定常状態であり，核分裂によって発生する中性子数と，炉内で吸収される中性子数と炉の表面から漏洩される中性子数の和とが均衡している．原子炉の設計における中心的な問題の 1 つ（核設計）は，この中性子数の均衡，すなわち臨界を維持するための原子炉のサイズ，形状，組成を計算によって決定することである．この目的のためには，中性子集団の空間的分布とその時間的変化を決める拡散方程式を解く必要があり，中性子の減速と共鳴吸収の問題を解く必要がある．

- しかし，原子炉は常に出力一定の状態 (臨界状態）にあるわけではない．例えば，原子炉を起動する場合，ある一定出力レベルまで上昇させる場合には超臨界状態にしなければならないし，1986 年のチェルノブイリ原発事故のよう

[4] このアプローチはまた認知科学の進展を考慮した教育法にも通じるかも知れない [45].

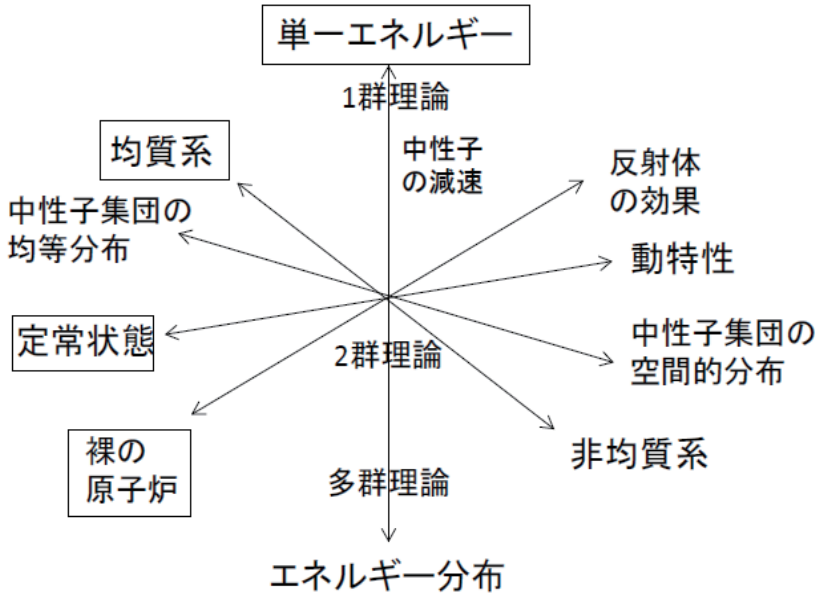

図 11: 原子炉物理学の学習・理解（認知）の地図

に，想定外の (複数の) 事象の連鎖または併発または事故の場合にも超臨界状態が生じる場合があり得る．非臨界状態にある原子炉中の中性子集団の振る舞いは原子炉の動特性 (reactor kinematics) 理論によって記述される．そして，臨界からの乖離の定量的度合いは (中性子数の）増倍率 k（または実効増倍率 k_{eff}) により定義される反応度 (reactivity)$\rho(\rho \equiv (k-1)/k)$ により決定される．そして，反応度の変化には種々の原因が関与する．

- 1 群理論，2 群理論，多群理論：関与する中性子のエネルギーは核分裂直後に放出される MeV 級の高エネルギーから熱中性子のエネルギー 0.01 eV 領域にわたるが，まずは単一エネルギー (単色) の場合を考える．1 群理論とは中性子のエネルギーが例えば，エネルギー 0.025eV をもつ熱中性子だけに限定 (近似) した理論の定式化を意味する．その後，熱中性子と MeV 級の高エネルギー中性子の 2 つだけを考慮するのが 2 群理論である．連続的スペクトルを有限数の離散的なエネルギー群として近似の度合いを高めるのが多群理論である．

- 均質系と非均質系：中性子の平均自由行程の大きさに比べて，不連続性（離散性）が小さく，無視できる系を均質系といい，不連続性（離散性）がより大きい系を非均質系という．まずは均質系を考え，その後，非均質の効果を考慮する．

- 時間的変化と空間的分布：中性子の集団は莫大な個数の中性子から構成され，一般には，同じ空間的領域において数密度には時間的変動もあるが，同空間

的に不均一に分布する．しかし，まずはまずどちらか一方だけに注目することにする．

- 裸の原子炉と反射体：裸の原子炉とは中性子反射体をもたない原子炉のことを意味する．
- 無限系と有限系：加筆計画中 !!

急いで実際的な概要を知りたい場合には，現場の技術者らによって執筆された文献 [46] が有用かもしれない．

3.1 核分裂連鎖反応における中性子世代

核分裂性物質を含む体系では，中性子は核分裂性物質に吸収され核分裂を起こしエネルギーを解放し，核分裂性物質を生成する．そして 2 個以上の中性子を新しく生み出す．ここで体系とは原子炉，原発事故後における溶融炉心または核爆発装置の中心部など，できるだけ柔軟にかつ一般的に考えておく．そして，この中性子がまた核分裂を誘発する．このようにして中性子増加をさせることができる体系を中性子増倍系という．

このような体系は中性子を増加させることができるが，いつでも，すなわち自動的に中性子数が増加しているわけではない [43]．中性子が核分裂連鎖反応を達成，維持，強化，停止するために中心的な役割を果すので中性子の挙動に注目する．ある 1 個の中性子は核分裂で「生れ」，核分裂性物質以外への吸収や体系外に漏れるといった偶然の一意図しない一「死」に出会うまで，体系内を動き回る．

図 12 に示すように，これらの中性子のうち，いくつかは核分裂性，あるいは核分裂可能性核種によって吸収され次の核分裂を起こす．つまり，核分裂中性子の新しい「世代」(generation) の誕生である[5]．

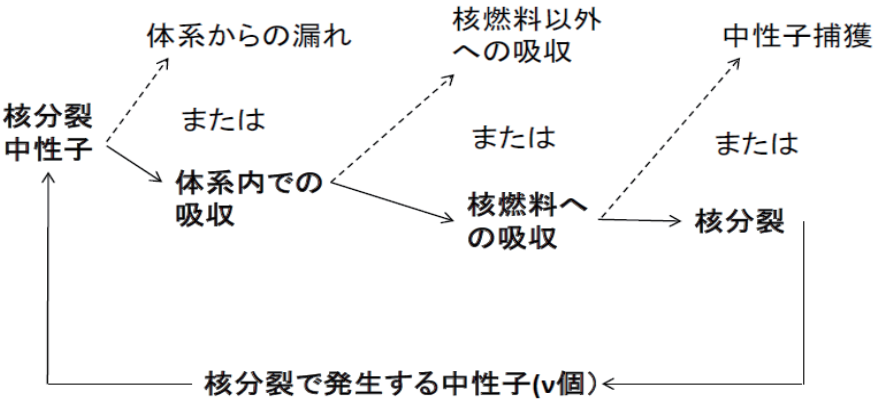

図 12: 核分裂連鎖反応における中性子の世代

[5] このように，核分裂連反応の理論は世代といういくらか生物学的な概念に依拠している [28]

1 個の中性子が生まれて核分裂性物質に吸収されるまでの平均時間を [中性子] 世代時間 (generation time) と呼ぶことこともある．

3.2 核分裂あたり発生する中性子数と核分裂性物質に吸収された中性子あたりの発生中性子数

1. 核分裂あたり発生する中性子数
   1 回の核分裂により平均して ν 個の中性子が発生するとすれば，

2. 核分裂性物質に吸収された中性子あたりの発生中性子数
   連鎖反応の次の世代の中性子がまだ核分裂していない原子核に吸収されると，中性子を吸収して，核分裂を起こすか，γ 線を放出して原子核の基底状態に留まる反応（＝中性子捕獲反応）のいずれかになる．核分裂のミクロ断面積を σ_{f}，中性子捕獲反応のそれを σ_{c} と記すと，次の世代の核分裂には次式で定義される η 個の中性子が利用可能となる．

$$\eta \equiv \left(\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{\sigma_{\mathrm{f}}+\sigma_{\mathrm{c}}}\right)\nu \tag{3.24}$$

3.3 増倍率と中性子数の時間的挙動ー未臨界，臨界，超過臨界ー

まず，考えている体系ー核分裂性物質の塊内の中性子数の増減のみを考える．系の大きさが無限の場合の増倍率を無限増倍率といい，の k_∞ とする．系が有限の大きさの場合，実効増倍率といい，k_{eff} とする．系の表面から系外に漏洩しない確率を P_{NL} とすると k_{eff} は

$$k_{\mathrm{eff}} \equiv k_\infty \cdot P_{\mathrm{NL}} \tag{3.25}$$

と書ける．(NL=non-leakage,「漏洩しない」という意味)．

(a) 外部中性子源なしの系の中性子数の増減
   核分裂連鎖反応で生じる中性子以外の発生源をもたない体系を外部中性子源なしの体系という．初めの中性子の個数を N_0, 中性子サイクルにおける世代時間[6]を ℓ と記す．説明の煩雑さを避けるため，取りあえず中性子の増倍率を k と記す．外部中性子源なしの系の任意の時刻 t における中性子数 $N(t)$ は次の式で表される

$$N(t) = N_0 \exp\left(\frac{k-1}{\ell}t\right). \tag{3.26}$$

[6]generation time．平均実効寿命，または中性子生成時間のこと．

ここで，$k \neq 1$ の場合， 次の量はペリオド (period) と呼ばれ，核分裂連鎖反応の激しさを特徴づける量で，ここでは T とする．ペリオド T の次元は時間である．

$$\frac{\ell}{k-1} \equiv T. \tag{3.27}$$

式 (3.26) の導出法：
時刻 t における中性子を N，時刻 $t+\Delta t$ における中性子数を $N+\Delta N$ とすると，中性子 1 個あたりの正味の変化数は吸収される 1 個を除く $k-1$ で決まり

$$\frac{\Delta N}{N} = (k-1)\frac{\Delta t}{\ell} \tag{3.28}$$

と表される．ここで $\Delta t \to \infty$ の極限を取ると，次の微分方程式が得られる．

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k-1}{\ell}N. \tag{3.29}$$

この微分方程式を初期条件 $N(0) = N_0$ を使って，解くと特殊解 (3.26) が得られる．

式 (3.26) より，図 13 に示すように，中性子数の時間変化は過剰増倍率といわれる $k-1$ と世代時間 ℓ により決まる．外部中性子源がない場合の中性子数

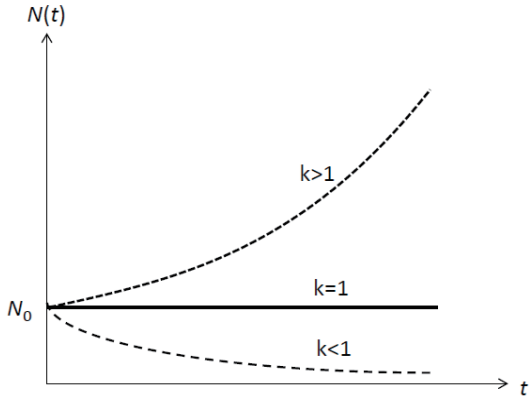

図 13: 外部中性子源がない場合の増倍率と中性子数の時間変化

の時間変化は増倍率の値に依存して以下のよう増減するか一定になる．

$k < 1$ (未臨界) : 中性子数は時間とともに指数関数的に減少
$k = 1$ (臨界) : 中性子数は一定
$k > 1$ (超過臨界) : 中性子数は時間とともに指数関数的に増大

(b) 外部中性子源のある系の中性子数の増減
外部中性子源ーその強さ (=単位時間当たりの中性子発生数) を S とするーの

ある系の任意の時刻 t における中性子数 $N(t)$ は次の式で表される．ただし，初期値を $N(0) = N_0$ とする．

$$N(t) = \left(N_0 + \frac{\ell}{k-1}S\right)\exp\left(\frac{k-1}{\ell}t\right) - \left(\frac{\ell}{k-1}\right)S. \tag{3.30}$$

式 (3.30) の導出法：
関連する微分方程式は，式 (3.29) の右辺に外部中性子源の強さ S を加えて

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{k-1}{\ell}\right)N + S \tag{3.31}$$

のような，k, ℓ, S は既知で一定値で，$N = N(t)$ の関数形が未知である非同次微分方程式となる．ただし，簡単のため，S は一定であると仮定する．

(a) $k = 1$ の場合:
式 (3.30) の解は $N(t) = St + N_0$ となる．

(b) $k \neq 1$ の場合:
式 (3.31) を次のように書き直せる．

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{k-1}{\ell}\right)\left(N + \frac{\ell}{k-1}S\right). \tag{3.32}$$

k, ℓ, S は既知で一定値であることを考慮して，新しい未知関数 $N' \equiv N + \ell S/(k-1)$ を導入すると式 (3.32) は次のようにより単純な微分方程式を満たす事が分かる．

$$\frac{dN'}{dt} = \left(\frac{k-1}{\ell}\right)N'. \tag{3.33}$$

この微分方程式の一般解は次のように求まる．

$$\frac{dN'}{N'} = \left(\frac{k-1}{\ell}\right)dt \to \ln N' = \left(\frac{k-1}{\ell}\right) + C \tag{3.34}$$

$$\to N' = \mathrm{e}^C \exp\left(\frac{k-1}{\ell}t\right). \tag{3.35}$$

初期条件を考慮して

$$N_0 + \frac{k-1}{\ell}S = \mathrm{e}^C \tag{3.36}$$

$$\to N(t) = \left(N_0 + \frac{\ell}{k-1}S\right)\exp\left(\frac{k-1}{\ell}t\right) - \left(\frac{\ell}{k-1}\right)S. \tag{3.37}$$

(c) 外部中性子源について:
外部中性子源 (external neutron source) とは体系の外ばかりではなく，体系の中にあっても，連鎖反応によって生まれる中性子によって引き起こされる核分裂ーそれ以外に中性子を発生させる核反応を含む場合もあるーによらない中性子発生源である．従って，核分裂の起動用に使われる Ra − Be 中性子源，および宇宙線により発生する中性子，自発核分裂により発生する中性子，遅発中性子など．

外部中性子源は，原子炉の起動時に挿入されることが多い [43].

3.4 ** 中性子集団の空間的振る舞いと臨界条件 (1 群拡散近似)

3.4.1 中性子数密度，中性子束と中性子流

原子炉理論の究極的目的は，炉心内の任意の位置 $\vec{r}$ と時刻 t における中性子集団の空間的分布を決定することである．

(a) 任意の位置 $\vec{r}$ と時刻 t における中性子数密度 $n(\vec{r},t)$ の定義：

$$n(\vec{r},t)d^3\vec{r} \equiv (\text{時刻 } t \text{ における位置}\vec{r}\text{まわりの体積要素 } d^3\vec{r}\text{内に存在する中性子数の期待値}) \tag{3.38}$$

ここで，期待値という用語が使われているのは，中性子集団の空間的振る舞いを決定する中性子輸送理論[7]が本来，統計理論であることに由来し，実際の中性子数密度 $n(\vec{r},t)$ は時間的に変動する，すなわち揺らぎをもつが，原子炉物理学ではその平均値のみに着目することを意味する．

(b) 中性子束:

(c) 中性子流:

3.4.2 拡散方程式

・仮定：

1. (原子炉内の）全ての中性子のエネルギーは同じである.(1 群理論 (one-group theory))
2. 散乱は等方的である．

拡散理論 (拡散近似) の根本的仮定は，粒子の流れ (＝単位時間，単位断面積を通過する粒子数) は粒子数密度（または濃度）の空間的勾配に比例するということである．

（中性子の流れ）∝ -(中性子系束の空間的勾配)

$$\vec{J} = -D\nabla\phi \tag{3.39}$$

$$\phi \equiv nv. \tag{3.40}$$

ここで，$\vec{J}$ は中性子の流れベクトル，D は拡散係数 (diffusion coefficient) である．もし，拡散係数 D が場所によらず一定ならば式 (3.39) の両辺のベクトルの発散 (divergence) をとると

$$\nabla\cdot\vec{J} = -D\nabla^2\phi, \ (D : \text{拡散係数}). \tag{3.41}$$

[7]原子分子の集団の空間的振る舞いは原理的にボルツマン (Boltzmann) の輸送方程式と言われるもので決定される．中性子集団に対する輸送理論を特に中性子輸送理論という．

・微小体積中における中性子数の収支は

$$
\begin{aligned}
(\text{中性子数密度の変化}) &= -(\text{中性子の系外への漏れ}) - (\text{中性子の系内での吸収}) \\
&\quad +(\text{中性子の発生または系外からの流入}) \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

という関係式で表される．中性子の発生は核分裂性物質の核分裂により生じ，系外からの流入は原子炉起動の際の中性子源により起こる．中性子吸収のマクロ断面積を Σ_a，単位時間あたりの中性子の発生または系外からの流入の強さを S とすると

$$
\frac{\partial n}{\partial t} = -(\nabla \cdot \vec{J}) - \Sigma_a \phi + S. \qquad (3.43)
$$

式 (3.43) に式 (**??**) を代入すると

$$
\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S \qquad (3.44)
$$

が得られる．この式を <u>拡散方程式 (diffusion relation)</u> という．特に，定常的な場合，すなわち $\partial n/\partial t = 0$ の場合

$$
D\nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = 0 \qquad (3.45)
$$

となる．さらに，核分裂性物質がない場合，すなわち，$S = 0$ の場合

$$
D\nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi = 0 \qquad (3.46)
$$

となる．$S \neq 0$ の場合は炉心部に相当し，$S = 0$ の場合は後述する，中性子反射体の部分が対応する．式を整理するため，次の量 κ を定義する．

$$
\kappa^2 \equiv \frac{\Sigma_a}{D},\ \kappa = \sqrt{\frac{\Sigma_a}{D}}. \qquad (3.47)
$$

式 (3.47) を式 (3.46) に代入すると，反射体における拡散方程式

$$
\nabla^2 \phi - \kappa^2 \phi = 0 \qquad (3.48)
$$

が得られる．

中性子増倍ある場合 (発生項 S がある場合，炉心に対応）の定常状態は式 (3.45) により支配されるが，この発生項の強さ S の値をどう取るかが問題である．元来，拡散理論の適用は原子炉野中の中性子がすべて同一であるという大きな仮定をしているが，原子炉の中の熱中性子のみを考えると大体正しい．しかし，核分裂の結果新しく発生する中性子が高速中性子ではなく熱中性子と見なすと，発生項の強さ $S = \nu\Sigma_f\phi$(要説明:ν は 1 回の核分裂あたり発生する中性子数の平均値，Σ_f は核分裂のマクロ断面積）となり，式 (3.45) は

$$
D\nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + \nu\Sigma_f \phi = 0 \qquad (3.49)
$$

と書ける．さらに，式 (3.49) を整理するため

$$k \equiv \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a},\ L^2 \equiv \frac{1}{\kappa^2} = \frac{D}{\Sigma_a},\ B^2 \equiv \frac{k-1}{L^2} \tag{3.50}$$

と置くと，式 (3.49) は

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0 \tag{3.51}$$

という簡単な形 (固有値方程式) に整理できる．式 (3.51) の導出は付録参照．原子炉物理学では L は拡散距離 (diffusion length0)，L^2 は拡散面積 (diffusion area)，B^2 は幾何学的バックリング (geometrical buckling) と呼ばれる ([40],p.239,p.248,p.270).

3.4.3 拡散係数の計算

今，散乱は等方的であると仮定していることに注意する．まず，図 14 に示すように，xy 面上の面要素 (面積素片)dS を単位時間に上から下方に通過する中性子の個数を J_- とすると

$$J_- = \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Sigma_s\phi \times \frac{\cos\theta}{4\pi r^2} \mathrm{e}^{-\Sigma_s r} \cdot r^2 dr d(\cos\theta) d\varphi \tag{3.52}$$

となる．ここで，$\cos\theta/(4\pi r^2)$ は体積要素 $d^3\vec{r} = dxdydz = r^2 drd(\cos\theta)d\varphi$ から散乱される中性子からなる面要素 dS を見る立体角で $\mathrm{e}^{-\Sigma_s r}$ は体積要素 $d^3\vec{r}$ から面要素 dS に達する間の中性子の減衰係数である．$\cos\theta$ は積分変数で，その積分領域は 0 から 1 までである．式 (3.52) では，$\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_a \simeq \Sigma_s$ という近似の下，Σ_s が使われている．

(a) 中性子束が位置によらず一定の場合:中性子束の一定値を ϕ_0 とすれば式 (3.52) の積分を実行すると

$$\begin{aligned} J_- &= \int_0^\infty \int_0^1 2\pi\Sigma_s\phi \times \frac{z}{4\pi r^2} \mathrm{e}^{-\Sigma_s r} \cdot r^2 dr dz \ (\cos\theta = z) \\ &= \frac{\phi_0}{2}\left(\int_0^\infty \Sigma_s \mathrm{e}^{-\Sigma_s r} dr\right)\left(\int_0^1 z dz\right) \\ &= \frac{\phi_0}{4} \end{aligned} \tag{3.53}$$

となる．

(b) もし，中性子束の値が図 14 の z 方向，すなわち dS と垂直方向のみ依存していて

$$\phi(z) \simeq \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 r\cos\theta \tag{3.54}$$

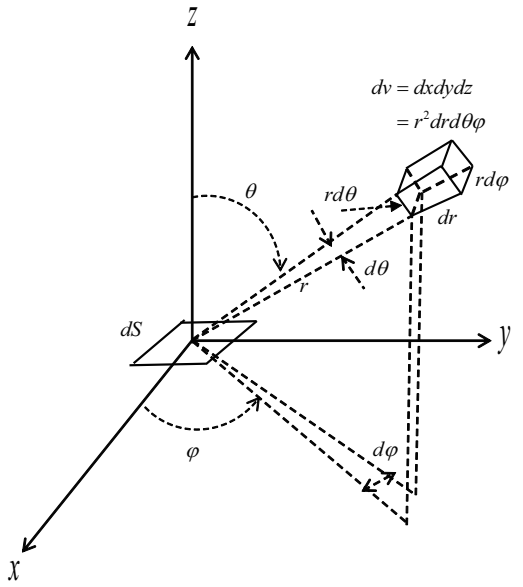

図 14: 式 (3.52) の計算に用いられた諸量

で表されるとする，式 (3.54) を式 (3.52) 代入して

$$
\begin{aligned}
J_- &= \frac{\phi_0}{4} + \int_0^\infty \int_0^1 2\pi\Sigma_s \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 r\cos\theta \times \frac{z}{4\pi r^2} \mathrm{e}^{-\Sigma_s r} \cdot r^2 dr dz \ (\cos\theta = z) \\
&= \frac{\phi_0}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \left(\int_0^\infty \Sigma_s \mathrm{e}^{-\Sigma_s r} r dr\right)\left(\int_0^1 z^2 dz\right) \\
&= \frac{\phi_0}{4} + \frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0}{6\Sigma_s} \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

となる．同様に，逆方向に通過する中性子の流れ J_+ を求めると

$$
J_+ = \frac{\phi_0}{4} - \frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0}{6\Sigma_s} \qquad (3.56)
$$

となる．したがって，z 方向に正味の流れ J_z は式 () と式 () の差となり

$$
J_z = J_+ - J_- = -\frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0}{3\Sigma_s} \qquad (3.57)
$$

となる．この式 (3.57) と式 (3.39) を対応させると，拡散係数 D は

$$
D = \frac{1}{3\Sigma_s} \qquad (3.58)
$$

となる．

3.4.4　平面状の中性子源による中性子束分布

中性子発生のない無限大媒質中に，平面状の中性子源が存在する場合の拡散方程式 (3.48) の解の具体例を考える．この場合，図？(挿入予定）に示す様に，中性子源の平面の両側に中性子が放出されるが，この放出量（率？）を，簡単のため，毎秒 1 cm^2 当たり 1 個，つまり，面の片側あたり，0.5 個とする．

平面を yz 面とすると

図？(挿入予定）

中性子束 ϕ は x だけの関数，すなわち $\phi = \phi(x)$ であるから，拡散方程式 (3.48) は

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \kappa^2\phi = 0 \tag{3.59}$$

となり，この微分方程式の一般解は

$$\phi(x) = A\mathrm{e}^{-\kappa x} + C\mathrm{e}^{\kappa x} \tag{3.60}$$

となる．A, C は任意定数である．$x = 0$ に中性子源があり，$x \to \infty$ の向きが炉の外であると考える．$x \to \infty$ のとき，もし $C \neq 0$ であれば，式（3.60) の右辺の第 2 項は発散し，物理的に不合理である．したがって，$C = 0$ である:

$$\phi(x) = A\mathrm{e}^{-\kappa x}. \tag{3.61}$$

係数 A を決めるために，平面状の中性子源の近傍における中性子の流れを考える．式 (3.39) の x 成分において

$$J_x(x \to 0) = -D\frac{\partial\phi}{\partial x}|_{x\to 0} = DA\kappa \tag{3.62}$$

である．今の設定により，(片側につき）毎秒 1 cm^2 当たり 0.5 個であり，　式 (3.62) に代入すると

$$A = \frac{1}{2\kappa D}\left(\frac{1}{\mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}}\right) \tag{3.63}$$

となる．結局，式 (3.61) は

$$\phi(x) = \frac{1}{2\kappa D}\mathrm{e}^{-\kappa x}\left(\frac{1}{\mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}}\right) \tag{3.64}$$

となる．

図？(挿入予定）

ここで，単位 (次元) の確認をしておくと，$[\phi] = 1/(\mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}), [\kappa] = 1/\mathrm{cm}, [D] = \mathrm{cm}$ である．

3.4.5 点状の中性子源による中性子束分布

次に，同様にして，中性子発生のない無限大媒質中に，点状の中性子源が存在する場合の拡散方程式 (3.48) の解の具体例を考える．大きな水槽の中央に，Ra-Be 中性子源のような小さい中性子源を置いたときは，ほぼこの状況になる．この場合，中性子分布は球対称になるから，中性子束 ϕ は原点からの距離 r だけの関数，$\phi = \phi(r)$ になるので，拡散方程式 (3.48) は球座標を用いて

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} - \kappa^2 \phi = 0 \tag{3.65}$$

となり，この一般解は，任意係数を A, C として

$$\phi(r) = A\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r}}{r} + C\frac{\mathrm{e}^{\kappa r}}{r} \tag{3.66}$$

となる．式 (3.66) の証明は付録？参照のこと．式 (3.66）の右辺第 2 項は無限遠方で発散するので，$C = 0$ である．すなわち，境界条件を満たす一般解は次のようになる．

$$\phi(r) = A\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r}}{r}. \tag{3.67}$$

点状の中性子源からの中性子の放出量 (率）は毎秒 1 個として，係数 A を決める．点状の中性子源が存在する場合の拡散方程式 (3.48) の動径方向成分は

$$J_r = -D\frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{3.68}$$

となる．一般解 (3.67) を式 (3.68) に代入すると

$$J_r = -DA\left(-\kappa\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r}}{r} - \frac{\mathrm{e}^{-\kappa r}}{r^2}\right) \tag{3.69}$$

となる．この式の両辺に $4\pi r^2$ をかけると

$$4\pi r^2 \cdot J_r = 4\pi DA\left(\kappa r \mathrm{e}^{-\kappa r} - \mathrm{e}^{-\kappa r}\right) \tag{3.70}$$

となる．今，点状の中性子源からの中性子の放出量 (率）は毎秒 1 個の場合を考えているので，式（3.70) において，$4\pi r^2 \cdot J_r = 1/\mathrm{s}$ とおいて，$r \to 0$ の極限をとると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{s}} &= 4\pi DA \\ \to A &= \frac{1}{4\pi D}\frac{1}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{3.71}$$

と決まる．点状の中性子源からの中性子束分布は

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi D}\frac{\mathrm{e}^{-\kappa r}}{r}\frac{1}{\mathrm{s}} \tag{3.72}$$

となる．

図？（挿入予定）

ここで，単位 (次元) の確認をしておくと，$[\phi] = 1/(\mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}), [r] = \mathrm{cm}, [D] = \mathrm{cm}$ である．

3.4.6 拡散距離

3.4.7 異なる媒質の境界における中性子の流れ

3.4.8 有限の厚さの媒質中の中性子束分布

3.5 ** 中性子集団の空間的振る舞いと臨界条件 (2 群拡散近似)

3.6 中性子の減速と共鳴吸収

中性子の, 重心系における散乱角 θ と実験室系における散乱角 φ の関係

$$\cos\varphi = \frac{A\cos\theta + 1}{\sqrt{A^2 + 1 + 2A\cos\theta}} \tag{3.73}$$

ここで，$\cos\varphi$ の角度平均 $\overline{\cos\varphi}$ を求めると

$$\begin{aligned} \overline{\cos\varphi} &\equiv \frac{\int_0^\pi \cos\varphi \times \sin\theta d\theta}{\int_0^\pi \sin\theta d\theta} \\ &= \frac{2}{3A}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

となる．

（式 (3.74) の証明）

$$(\text{分母}) = [-\cos\theta]_0^\pi = 2. \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} (\text{分子}) &= A\int_0^\pi \frac{\cos\theta\sin\theta d\theta}{\sqrt{A^2+1+2A\cos\theta}} + \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{A^2+1+2A\cos\theta}} \\ &= A\cdot I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.76}$$

ここで，分子の右辺の第 1 項，2 項の積分値をそれぞれ I_1, I_2 とおいた．まず，変数変換を行う．

$$\cos\theta = x \ \rightarrow -\sin\theta d\theta = dx,\ 1 \geq x \geq -1. \tag{3.77}$$

すると積分は

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{xdx}{\sqrt{(A^2+1)+2Ax}}, \tag{3.78}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(A^2+1)+2Ax}} \tag{3.79}$$

となる．ここで積分公式 [47]

$$\int x^m (ax+b)^\nu dx = [\frac{ax+b}{\nu+2} - \frac{n}{\nu+1}]\frac{(ax+b)^{\nu+1}}{a^2} \tag{3.80}$$

において，$a = 2A, b = A^2+1, \nu = -1/2$ とおいて

$$\begin{aligned} I_1 &= [\frac{2}{3}(A+1)^2 - 2(A^2+1)]\frac{(A+1)}{4A^2} - [\frac{2}{3}(A-1)^2 - 2(A^2+1)]\frac{(A-1)}{4A^2} \\ &= -\frac{2}{3A^2}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

同様に，積分公式

$$\int (ax+b)^\nu dx = \frac{(ax+b)^{\nu+1}}{(\nu+1)a} \tag{3.82}$$

において，$a = 2A, b = A^2+1, \nu = -1/2$ とおいて

$$I_2 = \frac{2}{A}. \tag{3.83}$$

以上を結果を代入すると

$$\overline{\cos\varphi} = \frac{A \times (-\frac{2}{3A^2}) + \frac{2}{A}}{2} = \frac{2}{3A} \tag{3.84}$$

のように式（3.74 ）が証明された．

平均エネルギー対数減少

中性子が弾性散乱により失うエネルギーの値の目安としての 1 回の衝突あたりのエネルギー対数の平均の減少を計算する．

$$\xi \equiv \overline{\ln\frac{E_1}{E_2}} = 1 + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\ln\alpha,\ [\alpha \equiv (\frac{A-1}{A+1})^2] \tag{3.85}$$

この関係式からわかることは，重心系において，散乱が等方的であれば，ξ の値は中性子のエネルギーの初めの値には無関係で，標的核さえ決まれば，中性子はいつも平均として同じ割合のエネルギーを失う．そして，この割合は標的核の質量数 A が増すほど小さくなる．

（式 (3.85) の証明）

式（？）より，

$$\xi = \frac{\int_0^\pi \ln\frac{E_1}{E_2}\ \sin\theta d\theta}{\int_0^\pi \sin\theta d\theta}. \tag{3.86}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
(\text{分母}) &= 2, && (3.87)\\
(\text{分子}) &= -\int_0^{\pi} \ln\{\frac{1}{2}[(1+\alpha)+(1-\alpha)\cos\theta]\}\sin\theta d\theta. && (3.88)
\end{aligned}
$$

変数変換を行うと,（分子）は次のように計算される．

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= x \to -\sin\theta d\theta = dx, 1 \geq x \geq -1, && (3.89)\\
(\text{分子}) &= -\int_{-1}^{+1} \ln\{\frac{1}{2}[(1+\alpha)+(1-\alpha)x]\}dx \\
&= -\int_{-1}^{+1} \ln[(1+\alpha)+(1-\alpha)x]dx + \int_{-1}^{+1} \ln 2dx. && (3.90)
\end{aligned}
$$

次の積分を計算する．

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \int_{-1}^{+1} \ln(px+q)dx = \left[\frac{px+q}{p}\{\ln(px+q)\}-1\right]_{-1}^{+1} \\
&= (1+\frac{q}{p})\ln(p+q)+(1-\frac{q}{p})\ln(-p+q)-2. && (3.91)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
p &= 1-\alpha,\ q = 1+\alpha \\
(p+q) &= 2,\ (-p+q) = 2\alpha, \\
(1+\frac{q}{p}) &= \frac{2}{1-\alpha}, (1-\frac{q}{p}) = \frac{-2\alpha}{1-\alpha} && (3.92)
\end{aligned}
$$

を代入すると,

$$
I = 2\ln 2 + (\frac{-2\alpha}{1-\alpha})\ln\alpha - 2. \tag{3.93}
$$

以上の結果より,

$$
\xi = 1 + (\frac{\alpha}{1-\alpha})\ln\alpha \tag{3.94}
$$

が導出される．証明終わり．

中性子のエネルギー E_1 を E_2 にまで減速するのに必要な衝突回数を n とすれば

$$
n \equiv \frac{\ln(\frac{E_1}{E_2})}{\xi} \tag{3.95}
$$

となる．今，核分裂中性子（その平均のエネルギーは 2.0 MeV) から熱中性子（その平均のエネルギーは 0.25 eV）まで減速するのに必要な衝突回数は

$$
(\text{熱中性子へ減速に必要な衝突回数}) = \frac{\ln(\frac{2\times10^6}{0.025})}{\xi} = \frac{18.2}{\xi} \tag{3.96}
$$

減速材の減速特性と熱中性子になるまでの衝突回数

材料	質量数 A	α	ξ	熱中性子になるまでの衝突回数
水素	1	0.000	1.000	18
重水素	2	0.111	0.725	25
ヘリウム	4	0.225	0.425	43
ベリリウム	9	0.640	0.206	86
炭素	12	0.716	0.158	114
ウラン	238	0.983	0.0084	2172

減速能（slowing down power）

$$
\begin{aligned}
(\text{減速能}) &\equiv (\text{レサージ})(\text{散乱の巨視的断面積}) && (3.97)\\
&= (\text{レサージ})\frac{(\text{アボガドロ数})(\text{密度})(\text{散乱断面積})}{(\text{グラム原子量})} && (3.98)\\
&= \xi\Sigma_s = \xi\frac{N_0\rho\sigma_s}{M_A} && (3.99)
\end{aligned}
$$

定義より，減速能は長さの逆数の次元をもつことに注意する．

減速比（moderating ratio）

$$
\begin{aligned}
(\text{減速比}) &\equiv (\text{レサージ})\frac{(\text{散乱の巨視的断面積})}{(\text{吸収の巨視的断面積})} && (3.100)\\
&= (\text{レサージ})\frac{(\text{散乱断面積})}{(\text{吸収断面積})} && (3.101)\\
&= \xi\frac{\Sigma_s}{\Sigma_a} = \xi\frac{\sigma_s}{\sigma_a} && (3.102)
\end{aligned}
$$

定義より，減速比は無次元の量である．

表（）

表？ 減速材のと減速比

減速材	減速能 [cm^{-1}]	減速比
水	1.53	70
重水	0.177	2100
ベリリウム	0.16	150
炭素	0.063	170

3.7 *原子炉の動特性 (Reactor kinematics)

原子炉は常に出力一定の状態 (臨界状態）にあるわけではない．例えば，原子炉を起動する場合，ある一定出力レベルまで上昇させる場合には超臨界状態にしなければならないし，1986 年のチェルノブイリ原発事故のように，想定外の (複数の) 事象の連鎖または併発または事故の場合にも超臨界状態が生じる場合があり得る．非臨界状態にある原子炉中の中性子集団の振る舞いは 原子炉の動特性 (reactor kinematics) 理論によって記述される．そして，臨界からの乖離の定量的度合いは (中性子）増倍率 k（または実効増倍率 k_{eff}) により定義される 反応度 (reactivity)$\rho(\rho \equiv (k-1)/k)$ により決定される．そして，反応度の変化には種々の原因が関与する．

原子炉の臨界の程度は，通常，制御棒 (control rod) と化学的粗調整 (chemical shim) を用いて制御される．制御棒は，中性子吸収材料を成形したもの，もしくはそれらの集合体からなり，それを原子炉内に挿入することにより，系の中性子増倍係数が変化する．このように，臨界状態の原子炉から制御棒が引き抜かれると，原子炉は傾向的に超臨界になろうとする．反対に，制御棒を挿入すると，系は未臨界状態に変化していく．化学的粗調整では，中性子吸収物質，通常はホウ酸 (H_3BO_3)，を冷却水中に混入させ，その濃度を変化させる（[40]，p.300）．

原子炉の臨界，すなわち (中性子）増倍率 k または反応度 ρ に影響を及ぼす大きな要因の 1 つは原子炉の温度 T である．温度 T の変化は必然的に反応度 ρ の変化に繋がる．また原子炉内で発生する冷却水の気泡 (ボイド，void) も反応度 ρ に影響を及ぼす．気泡の発生は冷却材の密度を低下させるため、ボイドの多寡によって原子炉の反応度が変化する．これをボイド効果 (Void Effect) と呼ぶ。

制御棒および化学的粗調整は，原子炉の出力レベルを変化させ，温度変化に対応するだけではなく，原子炉炉心における核燃料の燃焼の進行に伴う反応度 ρ の変化を補うようになっている．つまり，原子炉はその燃焼の初期においては，臨界を達成するための必要最低限よりも多くの核燃料を装荷しているのである．もしそうではなくて，原子炉内に臨界達成に必要最低限度の核燃料のみが装荷されている場合には，その原子炉は最初の核分裂を起こすと直ちに未臨界状態にならざるを得ない．それはなぜか．核分裂により，エネルギーが生成されるとともに，種々の核分裂生成物が蓄積していく．これらの核分裂生成物の中で，特にキセノン 135(^{135}Xe) とサマリウム 149(^{149}Sm) は非常に大きな中性子吸収断面積をもっており，これらが原子炉内に蓄積すれば，ρ の値に非常に大きな負の影響を与える．従って，最初は臨界達成のための必要最小限よりも多くの核燃料を装荷している．

3.7.1 中性子寿命

原子炉など体系内で中性子が発生してから、系内で吸収されたり，外部に漏洩したりして，系内から消失するまでの平均時間を中性子寿命 (neutron lifetime) といい，ここでは ℓ で表すことにする．ℓ は次の式で定義される：

$$\ell \equiv \frac{\text{炉内中性子総数}}{\text{単位時間に消滅する中性子数}}. \tag{3.103}$$

中性子寿命の概略値を表 5 に示す．　　（熱中性子炉の場合と高速中性子炉の場合との違いの原因については後日加筆予定!）

核分裂に続いて，即発中性子は系内の原子核と弾性散乱および非弾性散乱を繰り返すことによって減速される．

（備考；高速炉の場合は，即発中性子は吸収されたり炉心外に漏れる出るまでそれほど減速されない．高々keV の数十倍から数百倍の減速程度である．([40]，p.334）

熱中性子炉		
	軽水減速	$\ell = 0.5 \times 10^{-4}$ s
	重水減速	$\ell = 10^{-3}$ s
	黒鉛減速	$\ell = 10^{-3}$ s
高速中性子炉		$\ell = 10^{-7}$ s

表 5: 中性子寿命の概略値．出典 [30],p.87.

即発中性子が炉心内で発生し，吸収されるまでの平均時間を 即発中性子寿命 (prompt neutron lifetime) といい，ℓ_p で表すことにする．

軽水減速の場合，$\ell_p \approx 10^{-4}$s（[40]，p.335）：

ℓ_p の計算方法（加筆予定?!）

3.7.2 1 点炉近似動特性方程式とその解法 (1) 即発中性子だけが存在する場合

まず，原子炉内の中性子の空間分布を考えず，中性子数密度の平均値を n として，実効増倍率 $k_{\rm eff}$ が 1 ではない場合の n の時間変化を考えてみよう (1 点炉動特性方程式)．$k_{\rm eff}$ は一般には時間に依存するが，以下では $k_{\rm eff}$ が時間的に一定の場合を考える．

即発中性子だけが存在するような体系は，実は原子炉ではなく，核兵器のように，爆発的な核分裂連鎖反応を起こす系に対応する．ここでは，即発中性子だけが存在する場合を考える：

即発中性子数密度 n_p の時間変化は即発中性子寿命 ℓ_p の定義より，即発中性子数密度 n_p は

$$n_p(t+\ell_p) \quad = \quad k_{\rm eff}\ n_p(t) \tag{3.104}$$

を満たす．議論を簡単にするため，今 $k_{\rm eff}$ が時間的に一定とすれば，式 (**??**）の左辺は，ℓ_p が十分小さいとして近似的に

$$n_p(t+\ell_p) \quad = \quad n_p(t) + \ell_p \frac{dn_p(t)}{dt} \tag{3.105}$$

と書ける．この式 (3.105) を式 (3.104) の左辺に代入して整理すると

$$\frac{dn_p(t)}{dt} \quad = \quad \left(\frac{k_{\rm eff}-1}{\ell_p}\right) n_p(t) \tag{3.106}$$

という時間についての 1 階の微分方程式が得られる．考えている条件では $k_{\rm eff} \neq 1$ であるから，初期条件 $n_p(0) \equiv n_0$ の下で式 (3.104) の特殊解は

$$\begin{aligned} n_p(t) &= n_0 \exp\left(\frac{(k_{\rm eff}-1)t}{\ell_p}\right) \\ &= n_0\ {\rm e}^{t/T}, \end{aligned} \tag{3.107}$$

$$T \quad \equiv \quad \frac{\ell_p}{k_{\rm eff}-1} \tag{3.108}$$

と得られる．ここで，T は原子炉ピリオド (reactor period) と呼ばれ，指数関数の別の表示 $\exp \equiv e^x$ を用いた．

3.7.3 1 点炉近似動特性方程式とその解法 (2) 即発中性子と遅発中性子が共に存在する場合

ここでも，原子炉内の中性子の空間分布を考えず，中性子数密度の平均値を n として，実効増倍率 $k_{\rm eff}$ が 1 ではない場合の n の時間変化を考える (1 点炉近似動特性方程式). $k_{\rm eff}$ は一般には時間に依存する，すなわち $k_{\rm eff} = k_{\rm eff}(t)$ であるが，以下では簡単のため，$k_{\rm eff}$ が時間的に一定の場合を考える.

(A) 遅発中性子 1 組近似：

理解しやすくするため，まず遅発中性子が 1 群のみ，すなわち 6 群を平均化した実効的な遅発中性子群と考える:
遅発中性子の先行核全体の実効的な崩壊定数を λ とする (6 群の先行核の場合に関連する説明予定！). 核分裂により発生する中性子総数のうち，遅発中性子の割合を β と記す．式 (3.106) において，即発中性子数密度が $(1-\beta)n$ になることを考慮すれば，即発中性子数密度の時間変化率は

$$\frac{dn_p(t)}{dt} = \left(\frac{k_{\rm eff}(1-\beta)-1}{\ell_p}\right) n(t) \tag{3.109}$$

となる．任意の時刻 t における，遅発中性子を生成する先行核の数密度または先行核濃度 (precursor concentration) を $C(t)$ とすると，遅発中性子数密度 n_d の時間変化率は

$$\frac{dn_d(t)}{dt} = \lambda\, C(t) \tag{3.110}$$

となる．通常の崩壊法則の場合，原子核の個数 N は時間とともに減少するので，その時間変化率 $dN/dt = -\lambda N$ となるが，先行核の崩壊により遅発中性子が生成されるので，$\lambda\, C$ の前の符号は正値となることに注意する．従って，全中性子数密度 $n(t) = n_p(t) + n_d(t)$ の時間変化率は

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left(\frac{k_{\rm eff}(1-\beta)-1}{\ell_p}\right) n(t) + \lambda\, C(t) \tag{3.111}$$

と書ける．先行核の数密度 $C(t)$ の dt 時間における変化 dC は，崩壊による減少分 $(-\lambda C dt)$ と増加分 $(k_{\rm eff}\ \beta\ n(t)dt/\ell_p)$ の両方を考慮して

$$dC = -\lambda C dt + k_{\rm eff}\ \beta\ n(t)\frac{dt}{\ell_p} \tag{3.112}$$

とかける．これより

$$\frac{dC(t)}{dt} = \left(\frac{k_{\rm eff}\ \beta}{\ell_p}\right) n(t) - \lambda\, C(t) \tag{3.113}$$

が得られる．式 (3.111) と式 (3.113) は時間についての 1 階の，$n(t), C(t)$ を未知関数とする線形 2 元連立微分方程式であり，動特性方程式 (kinetic equation) という.

微分方程式 (3.111) と (3.113) は $n(t), C(t)$ について線形であるから，次の形で解を求める．

$$n(t) = n_0\ \mathrm{e}^{\omega t}, \tag{3.114}$$
$$C(t) = C_0\ \mathrm{e}^{\omega t}. \tag{3.115}$$

ここで，反応度 (reactivity)ρ と 中性子世代時間 (generation time)Λ を次のように導入する．

$$\rho \equiv \frac{k_{\mathrm{eff}} - 1}{k_{\mathrm{eff}}}, \tag{3.116}$$
$$\Lambda \equiv \frac{\ell_p}{k_{\mathrm{eff}}}. \tag{3.117}$$

ほとんどの場合，$k_{\mathrm{eff}} \simeq 1$ であるから，反応度 ρ は系の実効倍増率の値が 1 からどのくらいずれているか，すなわち原子炉が臨界状態からずれている程度を示す重要な量である．このように定義された ρ, Λ を用いると，式 (3.111) と式 (3.113) は次のように書き直せる．

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda}\right) n(t) + \lambda\ C(t), \tag{3.118}$$
$$\frac{dC(t)}{dt} = \left(\frac{\beta}{\Lambda}\right) n(t) - \lambda\ C(t). \tag{3.119}$$

ここで，最も基本的な場合として，時刻 $t = 0$ まで臨界状態，すなわち $k_{\mathrm{eff}} = 1,\ \rho = 0$ で一定の出力で運転している原子炉を考える．そして，その原子炉に $t = 0$ で一定の反応度 ρ_0 が挿入された場合の原子炉の出力変化応答を 1 点炉動特性方程式を解いて検討する．このような反応度挿入をステップ状の反応挿入と呼ぶ．ステップ状挿入反応度 $\rho(t)$ は

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \rho_0 & \text{if } t \geq 0 \end{cases} \tag{3.120}$$

と書ける．

式 (3.114) と式 (3.115) を式 (3.111) と式 (3.113) に代入して，整理すると 反応度方程式

$$\rho_0 = \frac{\ell_p \omega}{1 + \ell_p \omega} + \frac{\beta \omega}{(1 + \ell_p \omega)(\omega + \lambda)} \tag{3.121}$$

が得られる．同様に，式 (3.114) と式 (3.115) を式 (3.118) と式 (3.119) に代入すると反応度方程式の別表現

$$\rho_0 = \omega \Lambda + \frac{\omega \beta}{\omega + \lambda} \tag{3.122}$$

が得られる．反応度方程式のふたつの表現式 (3.121) と (3.122）は以下の使い方により，それぞれ長所と短所がある．

式 (3.121) は ρ_0 の与えられた値に対して，ω についての 2 次式になるので，その根は 2 つ $\omega_1, \omega_2 (\omega_1 > \omega_2)$ 存在する．式 (3.111) と式 (3.113) は線形の微分方程式であるから，一般解は適当な重ね合わせの係数 A_1, A_2 を用いて

$$n(t) = A_1 \cdot \mathrm{e}^{\omega_1 t} + A_2 \cdot \mathrm{e}^{\omega_2 t} \tag{3.123}$$

と書ける．

解の定性的な特徴を理解するために式 (3.121) の右辺を ω の関数 $f(\omega)$ とおいて，横軸に ω を，縦軸に $f(\omega)$ をとって，$f(\omega)$ のグラフを描く．図 15 に示されているように，与えられる ρ_0 の値に相当する横線と $f(\omega)$ のグラフとの交点は必ず 2 つ存在し，2 つの解 $\omega_1, \omega_2 (\omega_1 > \omega_2)$ が求められることは明らかであろう．定義式 (3.116) より，反応度 ρ_0 の取り得る範囲は $-\infty < \rho_0 < 1$ であり，$0 < \rho_0 < 1$ の場合のみ，$\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 0$ となり，反応度 ρ_0 の値が $\rho_0 < 0$ の場合，全ての解は負の値となる．$\rho_0 = 0$ の場合には臨界状態になるので，$\omega_1 = 0$ となり，この解に対応する中性子数密度は時間変化がないことに対応する．

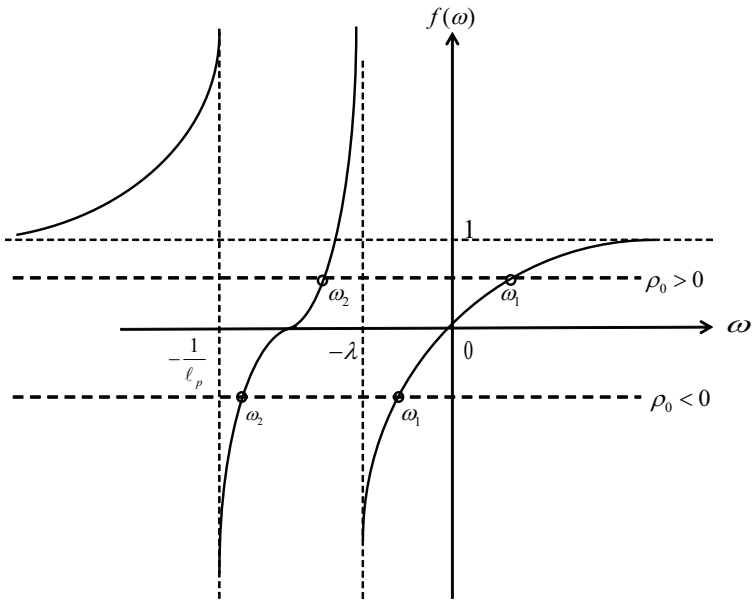

図 15: 遅発中性子を発生する先行核が 1 つの場合の反応度方程式のグラフ的解法

今考えている遅発中性子 1 組近似においては，以下に説明するように，2 つの解 $\omega_1, \omega_2 (\omega_1 > \omega_2)$ を解析的に求めることができる．そのために，反応度方程式の別表現 (3.122) を ω について，2 次方程式の形に書き直すと

$$\Lambda\omega^2 + (\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda)\omega - \rho_0\lambda = 0 \tag{3.124}$$

が得られる．根と係数の公式より，2 つの根は

$$\omega_1 \equiv -\frac{\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda}{2\Lambda} + \frac{\sqrt{(\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda)^2 + 4\rho_0\lambda\Lambda}}{2\Lambda}, \tag{3.125}$$

$$\omega_2 \equiv -\frac{\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda}{2\Lambda} - \frac{\sqrt{(\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda)^2 + 4\rho_0\lambda\Lambda}}{2\Lambda} \tag{3.126}$$

と表される．このように，遅発中性子を一組と近似すれば，ステップ状反応度挿入に対する原子炉出力の時間的な応答が解析的に表されることが分かる．

ここで，$\Lambda \approx \ell_p \approx 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ であるから，$(\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda)^2 \gg 4\rho_0\lambda\Lambda$, $(\beta - \rho_0) \gg \lambda\Lambda$ と考えてよいので，2 つの根は近似的に

$$\omega_1 \approx -\frac{\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda}{2\Lambda} + \frac{\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda}{2\Lambda}\left[1 + \frac{4\rho_0\lambda\Lambda}{(\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda)^2}\right]^{1/2},$$

$$
\begin{aligned}
&\approx -\frac{\beta-\rho_0+\lambda\Lambda}{2\Lambda}\left(1-\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4\rho_0\lambda\Lambda}{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)^2}\right]\right),\\
\to\omega_1 &\approx \frac{\rho_0\lambda}{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}\approx\frac{\rho_0\lambda}{\beta-\rho}, \qquad (3.127)\\
\omega_2 &\approx -\frac{\beta-\rho_0+\lambda\Lambda}{2\Lambda}-\frac{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}{2\Lambda}\approx-\frac{(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)}{\Lambda}\\
\to\omega_2 &\approx -\frac{\beta-\rho_0}{\Lambda} \qquad (3.128)
\end{aligned}
$$

と書ける．ここで，$|a|\ll 1$ の場合の近似式 $(1+a)^m\approx 1+ma$ を用いた．したがって，中性子数密度 $n(t)$ と先行核密度 $C(t)$ は近似的に

$$
\begin{aligned}
n(t) &= A_1\cdot\exp\left[-\left(\frac{\beta-\rho_0}{\Lambda}\right)t\right]+A_2\cdot\exp\left[\left(\frac{\rho_0\lambda}{\beta-\rho_0}\right)t\right], \qquad (3.129)\\
C(t) &= B_1\cdot\exp\left[-\left(\frac{\beta-\rho_0}{\Lambda}\right)t\right]+B_2\cdot\exp\left[\left(\frac{\rho_0\lambda}{\beta-\rho_0}\right)t\right] \qquad (3.130)
\end{aligned}
$$

と表される．ここで，B_1, B_2 は任意定数である．これらの式 (3.129) と (3.130) は原子炉の時間的挙動を定性的に理解するのに有効である．なお，これらの式 (3.129) と (3.130) を原子炉の動特性方程式 (3.118) と (3.119) に代入し，初期条件，$n(0)=n_0$, $C(0)=\beta n_0/(\lambda\Lambda)$ を代入し，$\Lambda\approx\ell_p\approx 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ であるから，$(\beta-\rho_0+\lambda\Lambda)^2\gg 4\rho_0\lambda\Lambda$, $(\beta-\rho_0)\gg\lambda\Lambda$ と考えてよいので，任意定数 A_1, A_2, B_1, B_2 が近似的に求まり，中性子数密度と先行核濃度がそれぞれ

$$
\begin{aligned}
n(t) &\simeq -\frac{\rho_0 n_0}{(\beta-\rho_0)}\exp\left[-\left(\frac{\beta-\rho_0}{\Lambda}\right)t\right]+\frac{\beta n_0}{(\beta-\rho_0)}\exp\left[\left(\frac{\rho_0\lambda}{\beta-\rho_0}\right)t\right], \qquad (3.131)\\
C(t) &\simeq \frac{\rho_0\beta_0 n_0}{(\beta-\rho_0)^2}\exp\left[-\left(\frac{\beta-\rho_0}{\Lambda}\right)t\right]+\frac{\beta n_0}{\lambda\Lambda}\exp\left[\left(\frac{\rho_0\lambda}{\beta-\rho_0}\right)t\right] \qquad (3.132)
\end{aligned}
$$

となる．式 (3.131) と (3.132) の導出は付録参照．式 (3.131）において，$t=0$ より直後において，右辺第一項は急速にゼロに近づくので，

$$
n(t) \simeq \frac{\beta n_0}{(\beta-\rho_0)} \qquad (3.133)
$$

となる．

以下では，典型的な場合の反応度方程式の解を調べる．

(a) 正の反応度 ($\rho_0>0$):
このとき，図 15 より，中性子密度の時間変化を決める 2 つの ω のうち，1 つだけが正 ($\omega_1>0$) で，他は負に成る．したがって，十分時間が経過したとき

$$
n(t) = A_1\mathrm{e}^{\omega_1 t} \qquad (3.134)
$$

のように，指数関数的に増大する．さらに，$\omega_1\equiv 1/T$ とおくと

$$
n(t) = A_1\mathrm{e}^{t/T} \qquad (3.135)
$$

と書ける．T は (原子炉の) 安定ペリオド (period) と呼ばれる．正の反応度の場合，中性子数密度，すなわち, それに比例する原子炉出力もペリオド T の短さに応じて指数関数的に増大することになる！

(b) 負の反応度 ($\rho_0 < 0$):
このとき，図 15 より，中性子密度の時間変化を決めるすべての ω は負に成る．さらに，$|\omega_1| < |\omega_2|$ なので，したがって，十分時間が経過したとき

$$n(t) = A_1 \mathrm{e}^{-|\omega_1|t} \tag{3.136}$$

のように，指数関数的に減少する．しかし，ρ_0 の値が大きな負の場合，正の反応度投入の時にはない特徴が現れる．すなわち，図 15 より ρ_0 をいくら負で大きくしても，ω_1 はある一定値 $-\lambda$ よりも小さくならない．ρ_0 の値が大きな負の場合原子炉中の中性子数密度，したがって原子炉出力は $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ の形で変化する．したがって，原子炉にいかに大きな負の反応度を投入したとしても，そのペリオド $T \approx 1/\lambda$ より早くその出力を低下させることができない.(後述するように，実際の場合のペリオドは約 80 s である！)

(c) 微小な反応度の添加 ($|\rho_0| \ll \beta$):
このとき，図 15 より，$|\omega_1| \ll \lambda < 1/\ell$ と考えてよいので，長時間経過後の反応度方程式 (3.122) は

$$\rho_0 \approx \omega_1 \Lambda + \frac{\omega_1 \beta}{\lambda} \tag{3.137}$$

と書ける．$k_{\mathrm{eff}} \simeq 1$ であることを考慮すれば，これよりペリオド T は

$$T = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{\rho_0}(\ell_p + \frac{\beta}{\lambda}) \tag{3.138}$$

となる．さらに，遅発中性子を含む全中性子の平均寿命 ℓ を用いると

$$T = \frac{\ell}{\rho_0}, \tag{3.139}$$

$$\ell \equiv \ell_p + \frac{\beta}{\lambda} \tag{3.140}$$

と書ける．(式 (3.164) の別の導出は付録参照.）U-235 の中性子誘発核分裂の場合，$\ell_p \approx 10^{-4}$ s, $\beta = 0.0065$, $\lambda = 0.0765\mathrm{s}^{-1}, \beta/\lambda = 0.085$ s である．$k_{\mathrm{eff}} = 1.000 \to 1.001$ と変化したとする．すなわち $\rho_0 = 0.001$ であるから，ペリオド $T \approx 85$ s となる．したがって，即発中性子だけの場合には実際的に原子炉を機械的手段で制御することは不可能であるが，全中性子数の割合がわずか $\beta = 0.0065(0.65\%)$ の遅発中性子が存在することにより，原子炉を機械的手段で制御することが可能になることがわかる．

(d) 即発臨界 ($\rho_0 = \beta$):
投入される反応度がちょうど β，すなわち遅発中性子数割合と等しいとき，原子炉は即発中性子のみで臨界となる．この状態 ($\rho_0 = \beta$) を 即発臨界 (prompt criticality) という．投入される反応度が，この即発臨界となる反応度をこえるかどうかが，原子炉の動特性が遅発中性子によって支配されるか，即発中性子によって支配されるかの境目となる．U-235 の中性子誘発核分裂の場合，$\beta = 0.0065$ なので，わずかに約 0.0065，すなわち 0.65%の反応度を添加するだけで即発臨界になるのである！

この重要性に着目して，反応度の単位として，ドルという単位が原子炉物理学で使用されることがある．投入される反応度がちょうど β(遅発中性子数割合) と

なる反応度を 1 ドル (1 \$) の反応度という．さらに，1 ドルの反応度の 100 分の 1 の反応度を 1 セントという．

U-235 の中性子誘発核分裂の場合，$\beta = 0.0065$ 程度である．先述したように，反応度が 1 ドルより小さい ($\rho_0 < \beta$) 場合，原子炉の時間的応答は遅発中性子により支配され，原子炉は機械的に制御が可能である．しかし，反応度が 1 ドル以上 ($\rho_0 \geq \beta$) の場合，原子炉の時間的応答は即発中性子により支配され，原子炉は機械的手段で制御することが不可能になる．そのような状態における中性子数変化を次項で検討する．

(e) 大きな反応度の添加 ($\rho_0 > \beta$) の場合の核出力暴走:

ここでは，β を越える大きな反応度が投入されたときのことを考える．このとき，$\omega_1 \gg \beta$ であり，かつ ω_1 に対して λ を無視できるので，長時間経過後の反応度方程式 (3.122) は

$$\rho_0 \approx \omega_1 \Lambda + \beta \tag{3.141}$$

となり，ペリオド T は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\omega_1} = \frac{\Lambda}{\rho_0 - \beta} = \frac{\ell_p}{k_{\rm eff}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k_{\rm eff}-1}{k_{\rm eff}}\right) - \beta} \\ &= \frac{\ell_p}{k_{\rm eff}(1-\beta) - 1} \end{aligned} \tag{3.142}$$

と書ける．$k_{\rm eff} \simeq 1$, $\beta \ll 1$ であるから，原子炉の時間的応答は即発中性子寿命 $\ell_p \approx 10^{-4}$s だけで決まることが分かる．当然のことながら，原子炉は $\rho_0 > \beta$ の状態が起こらないように運転しなければならない．逆に，$\rho_0 > \beta$ の状態が発生すれば，原子炉の時間的応答は即発中性子により支配され，機械的手段で制御することが不可能になり，連鎖反応の継続時間に応じたエネルギーが放出される．すなわち 核出力暴走 (power excursion)[25] が起こる．

(f) （備考）タービントリップ [25]:

タービントリップ (turbine trip) とは送電線に落雷があったような時，安全確保上，タービンを急速に停止することである．タービンの停止によって水蒸気の行き場が爆成る結果，沸騰水型軽水炉 (BWR) では原子炉の圧力が急激に高くなる．この結果，炉心にあるボイド（水の泡）が潰れ，通常の軽水炉がそうであるように，後述する反応度ボイド係数が負の場合には，反動度が印加される．その反応度は高々0.45 ドル程度であり，出力上昇の度合いは定格出力の 2 倍程であるという（[25],p.44）．

(g) 反応度の投入直後における変化ー即発跳躍近似:

ステップ状の反応度が投入された直後に限れば，遅発中性子先行核の濃度が時間的に一定のままであると仮定できる．そのときの先行核濃度を C_0 と置くと，動特性方程式 (3.118) と (3.119) は

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left(\frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}\right) n(t) + \lambda\, C_0, \tag{3.143}$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \left(\frac{\beta}{\Lambda}\right) n(t) - \lambda\, C_0 \tag{3.144}$$

となる．上の仮定より，$dC(t)/dt = 0$ とおけるので，反応度投入前 $(t \leq 0)$ の中性数密度を n_0 とすると，先行核濃度 C_0 は

$$C_0 = \frac{\beta}{\lambda\Lambda} n_0 \tag{3.145}$$

と表される．これを式 (3.143) に代入すると

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left(\frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}\right) n(t) + \frac{\beta}{\Lambda} n_0 \tag{3.146}$$

となる．初期条件を考慮して，この微分方程式を解くと

$$n(t) = \left[\frac{\beta}{(\beta - \rho_0)} - \frac{\rho_0}{(\beta - \rho_0)} \exp\left(-\frac{(\beta - \rho_0)}{\Lambda} t\right)\right] n_0 \tag{3.147}$$

となる．式 (3.147) の導出は付録参照.

ここで，即発臨界とならない条件，すなわち $\rho_0 < \beta$ の場合を考えると，上式の右辺第 2 項の指数部内に係数は負で，また (Λ が非常に小さいから）非常に大きな値になるので，時間の経過とともに第 2 項は急速にゼロに近づくことになる．この結果，$n(t)$ は反応度を加えた直後に

$$n(t) \simeq \frac{\beta}{(\beta - \rho_0)} n_0 \tag{3.148}$$

となる．式 (3.148）は式 (3.133) と一致している．このように，反応度の投入直後に，原子炉出力に急速な変化が起こる．この急速な変化を即発跳躍 (prompt jump) と呼ぶ．仮に，投入される反応度 ρ_0 が 0.001(k_{eff} の 1.000 から 1.001 への変化に相当) であるとすると

$$\frac{\beta}{(\beta - \rho_0)} = \frac{0.0065}{(0.0065 - 0.001)} \simeq 1.182 \tag{3.149}$$

となるので，中性子数密度，すなわちその値に比例する原子炉出力は反応度の投入直後に 1.182 倍に変化する．18%近くの出力上昇は大きな変化量で，通常の運転状態であれば，中性子束高の スクラムまたは原子炉トリップ[8] により原子炉が停止してしまう．(この即発跳躍はまたロッドドロップ法として，大きな負の反応度の測定にも使われる ([42],p.161)．),

(h) 外部中性子源をもつ臨界未満原子炉:

最後に，原子炉が未臨界状態に保たれたまま，外部中性子源によって定常状態が維持されている状況について考える．このような状況は中性子源を挿入したときのの起動時の原子炉や，近年研究が進められている加速器駆動未臨界型原子炉 (ADSR : Accelerator Driven Subcritical Reactor）) などにおいて現れる．この場合，原子炉動特性方程式において，中性子数密度の式に中性子源の強度 $s(t)$ が加わることになり，遅発中性子の式は変わらない．すなわち

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left(\frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}\right) n(t) + \lambda\, C(t) + s(t), \tag{3.150}$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \left(\frac{\beta}{\Lambda}\right) n(t) - \lambda\, C(t) \tag{3.151}$$

[8]原子炉スクラム（げんしろスクラム，英: reactor scram）またはスクラム (英: scram, SCRAM) とは原子炉が緊急停止した状態，または、原子炉を緊急停止させることである．加圧水型原子炉では原子炉トリップ（げんしろトリップ，英: reactor trip）ということがある．多くの場合，スクラムは、通常の原子炉の停止手順の一部でもある．

となる．ここでは，簡単のため，これらの連立微分方程式において，未臨界度が一定である (常に一定の負の反応度 ρ_0 が入っている) とともに，外部中性子源も一定値 s_0 である原子炉を考える．この場合，中性子数密度も遅発中性子数密度も時間的に変化しないので

$$0 = \left(\frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda}\right) n(t) + \lambda\, C(t) + s_0, \tag{3.152}$$

$$0 = \left(\frac{\beta}{\Lambda}\right) n(t) - \lambda\, C(t) \tag{3.153}$$

となる．式 (3.153) より，$C(t)$ を式 (3.152) に代入すると

$$n(t) = -\frac{\Lambda s_0}{\rho_0} \tag{3.154}$$

が得られる．ここで $\rho_0 < 0$ であることに注意．この式 (3.154) が外部中性子源により定常状態になっている原子炉の出力を表す式であり，未臨界の出力は中性子源強度 s_0 に比例するとともに，未臨界度 $|\rho_0|$ に反比例して決まることがわかる．

(B) 遅発中性子を発生させる先行核集団を 6 群に分類した場合:
遅発中性子を生成する先行核集団を 6 群に分類する (より現実的な近似) 場合，先行核 1 群近似で説明した関係式は次のように，拡張される．i 番目の先行核群の相対的割合を β_i，平均寿命を λ_i とする．先行核 1 群近似において導入した β, λ は次のように表せる ([42],p.161)．

$$\beta = \sum_{i=1}^{6} \beta_i, \tag{3.155}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{6} \frac{\lambda_i}{\beta_i}. \tag{3.156}$$

原子炉の動特性方程式を決める方程式 (3.118) と (3.119) の拡張された表現は

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left(\frac{\rho - \beta}{\Lambda}\right) n(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i\, C_i(t), \tag{3.157}$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \left(\frac{\beta_i}{\Lambda}\right) n(t) - \lambda_i\, C_i(t)\ (i = 1, 2, \cdots, 6) \tag{3.158}$$

となる．反応度方程式 (3.121) の拡張された表現は

$$\rho_0 = \frac{\ell_p \omega}{(1 + \ell_p \omega)} + \frac{1}{(1 + \ell_p \omega)} \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i \omega}{(\omega + \lambda_i)} \tag{3.159}$$

となり，7 次方程式になる．一定の反応度 ρ_0 に対する反応度方程式の根，$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_7$ の絶対値の大きさの順は $|\omega_1| < |\omega_2| < \cdots < |\omega_7|$ となる．同様に，反応度方程式の別表現 (3.122) の拡張された表現は

$$\rho_0 = \omega\Lambda + \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega \beta_i}{\omega + \lambda_i} \tag{3.160}$$

となる．微小な反応度の添加の場合，長時間経過後の反応度方程式 (3.141) の拡張された表現は

$$\rho_0 \simeq \omega_1\Lambda + \sum_{i=1}^{6} \frac{\omega_1\beta_i}{\omega_1+\lambda_i} \simeq \omega_1\Lambda + \beta \tag{3.161}$$

と書ける．ここで，$\omega_1 \gg \lambda_i$ を考慮し，式 (3.155) を用いた．$k_{\rm eff} \simeq 1$ であることを考慮すれば，これよりペリオドの式 (3.138) の拡張された表現

$$T = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{\rho_0}\left(\ell_p + \sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right) \tag{3.162}$$

となる．さらに，<u>遅発中性子を含む全中性子の平均寿命 ℓ</u> の拡張された表現を用いて

$$T = \frac{\ell}{\rho_0}, \tag{3.163}$$

$$\ell \equiv \ell_p + \sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i} \tag{3.164}$$

と書ける．

3.7.4 **動特性の空間依存性

これまで，時間依存性のある原子炉の動特性を 1 点炉近似にもとづいて解析してきた．そこでは 4 中性子束は時間依存性のない，空間形状因子と時間依存の振幅との積と考えた．しかし，この過程は多くの現実の問題で不適当である．たとえば，大きな反応度をもつ制御棒の (仮想的) 引き抜き事故の問題がある．今日の多くの動力炉では，その炉心の直径が中性子の拡散距離の 200 倍以上にもなり，中性子の運動スケールに比べてかなり大きい．このような炉心のアル点での中性子束や出力密度（あるいは増倍率）の時間的変動が他の部分に伝わるのに時間がかかることになる．例えば，冷却水温度の不均一性や核分裂生成物の特積によって出力に空間分布が傾きをもつことがある．

一般に，反応度の局所的急変に対する原子炉の過渡的挙動を 1 点炉近似における動特性方程式で詳しく予想することはできない．より正確には，実効中性子寿命の時間すスケールで中性子束が変化すると 1 点炉近似は使えない.（[29] の p.295，[31] の pp.267-269. ）このような場合，空間依存動特性を考える必要がある [32],[33]．しかし，関連する方程式群を数値的に解析することは容易ではない [34].

1988 年のラサール原発 2 号炉（米国）が出力振動を起こしたことに関連して，特に，沸騰水型軽水炉における出力の空間的変動がある場合，炉心全体の出力の平均値を計測するだけでは不十分で，局所的には燃料棒が破損するようなレベルまで出力が振動・上昇する可能性があることが指摘されている [35].

3.8 反応度の変化

3.8.1 発熱による反応度の変化

（挿入予定 !!: 軽水減速炉における発熱による反応度変化の原因フローチャート）

(a) ドップラー効果 (Doppler effect))

(b) 減速材密度の変化

(c) 熱中性子エネルギースペクトルの変化

3.8.2 燃焼による反応度の変化

（挿入予定 !!: 軽水減速炉における燃焼による反応度変化の原因フローチャート）

(a) 核燃料の原子核変換

(b) 燃焼による反応度変化

3.8.3 Xe-135,Sm-149 の濃度変化

3.9 反応度の制御

(a) 制御棒による反応度の制御

(b) 化学的粗調整による反応度の制御

(c) 再循環流量制御による反応度の制御 (BWR のみ)

A 式 (3.51) の導出

式 (3.49) の両辺を D で割って，式（3.50）で導入された定数を用いると

$$\nabla^2\phi - \frac{\Sigma_a}{D}\left(1 - \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}\right)\phi = 0 \rightarrow \nabla^2\phi - \frac{1}{L^2}(1-k)\phi = 0 \tag{A.165}$$

となり，式 (3.51) が導出される．

A 式 (3.66) の証明

式 (3.65) は次のように書き直せる．

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \kappa^2\phi. \tag{A.166}$$

一般解 (3.66) がこの微分方程式 (A.166) を満たすかどうか確かめる．ここで

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pm\kappa r}}{r}\right) = \pm\kappa\frac{\mathrm{e}^{\pm\kappa r}}{r} - \frac{\mathrm{e}^{\pm\kappa r}}{r^2} \tag{A.167}$$

を得る．これより

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pm\kappa r}}{r}\right) = \pm\kappa r\ \mathrm{e}^{\pm\kappa r} - \mathrm{e}^{\pm\kappa r} \tag{A.168}$$

となる．さらに，この式 (A.168) の両辺を r で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pm\kappa r}}{r}\right)\right) &= \pm\kappa\ \mathrm{e}^{\pm\kappa r}+(\pm\kappa)^2 r\ \mathrm{e}^{\pm\kappa r}-(\pm\kappa)\mathrm{e}^{\pm\kappa r}\\ &= \kappa^2\ r\ \mathrm{e}^{\pm\kappa r}\end{aligned} \tag{A.169}$$

を得る．この式の両辺を r^2 で割ると

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pm\kappa r}}{r}\right)\right) = \kappa^2\ \frac{\mathrm{e}^{\pm\kappa r}}{r} \tag{A.170}$$

となり，解 (3.66) は確かに微分方程式 (A.166) を満たすことが証明された．

A　*式 (3.121) の証明

*式 (3.121) の証明：式 (3.114) と式 (3.115) を式 (3.111) と式 (3.113) に代入し

$$\omega n_0 = \frac{k_{\mathrm{eff}}(1-\beta)-1}{\ell_p}n_0+\lambda\ C_0, \tag{A.171}$$

$$c_0 = \frac{k_{\mathrm{eff}}\ \beta}{\ell_p(\omega+\lambda)}n_0 \tag{A.172}$$

を得る．式 (A.172) を式 (A.171) に代入して

$$\omega = \frac{k_{\mathrm{eff}}-1-k_{\mathrm{eff}}\beta}{\ell_p}+\frac{\lambda k_{\mathrm{eff}}\beta}{\ell_p(\omega+\lambda)} \tag{A.173}$$

とまず変形する．式 (A.173) の両辺に $\ell_p(\omega+\lambda)/k_{\mathrm{eff}}$ をかけて，定義 (3.116) を用いると

$$\omega\ell_p(\omega+\lambda)\frac{1}{k_{\mathrm{eff}}} = (\rho_0-\beta)(\omega+\lambda)+\beta\lambda k_{\mathrm{eff}} \tag{A.174}$$

となる．ここで，$1/k_{\mathrm{eff}}=1-\rho_0$ という関係を式 (A.174) に代入して，ρ_0 について整理すると式 (3.121) が導出される．(証明終)

A　関数 $f(\omega)$ のグラフの概略の理解

関数 $f(\omega)$ のグラフの概略がなぜ図 15 のようになるかを理解するには，次の諸量を計算または確認すればよい：

1. $f(\omega)$ の ω の無限遠方での漸近的振る舞い：

$$\begin{aligned} f(\omega) &\equiv \frac{\ell_p\omega}{1+\ell_p\omega}+\frac{\beta\omega}{(1+\ell_p\omega)(\omega+\lambda)}\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{\ell_p\omega}}+\frac{\beta}{(\frac{1}{\omega}+\ell_p)(\omega+\lambda)},\\ \to \lim_{\omega\to\pm\infty} f(\omega) &= 1. \end{aligned} \tag{A.175}$$

2. $f(\omega)$ の傾き：

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{(1-\beta)\ell_p \cdot \omega^2 + 2\lambda\ell_p \cdot \omega + \lambda(\ell_p\lambda + \beta)}{(1+\ell_p\omega)^2(\omega+\lambda)^2}. \tag{A.176}$$

この微分係数の分母は正の値である．分子は正の係数をもつ 2 次関数であり，その最小値の符号を調べる．変数 x の 2 次関数 $g(x) \equiv ax^2 + bx + c$, $(a, b, c > 0$ の最小値は $(4ac - b^2)/4a$ であるから，その符号は $(4ac - b^2)$ の符号と同じである．同様に，$f(\omega)$ の最小値の符号は

$$4(1-\beta)\ell_p\lambda(\ell_p\lambda + \beta) - (2\lambda\ell_p)^2 = 4\ell_p\lambda\beta(1 - \ell_p\lambda - \beta) > 0 \tag{A.177}$$

となる．なぜならば，$\beta \approx 0.007$, $\ell_p \approx 10^{-4}\mathrm{s}$, $\lambda \approx (0.01 - 4)\mathrm{s}^{-1}$ であるから．

3. $f(\omega)$ をゼロにする ω の値：

$$\begin{aligned} 0 &= f(\omega) \\ &= \omega\frac{(\ell_p\omega + \ell_p\lambda + \beta)(\omega+\lambda)}{(1+\ell_p\omega)(\omega+\lambda)} \\ \to \omega &= 0, \ -\frac{\ell_p\lambda + \beta}{\ell_p} < 0. \end{aligned} \tag{A.178}$$

4. $f(\omega)$ が発散する ω の値：$\omega = -\frac{1}{\ell_p}$, λ.

A 式 (3.131) と (3.132) の導出

まず，係数 A_1, A_2 を求める．式 (3.129) と (3.130) に初期条件を代入すると

$$n_0 = A_1 + A_2 \tag{A.179}$$

となる．式 (3.118) と (3.119) を辺々加えて，$t = 0$ で $dC/dt = 0$ を含む初期条件を考慮すると

$$-\left(\frac{\beta - \rho_0}{\Lambda}\right)A_1 + \left(\frac{\lambda\rho_0}{\beta - \rho_0}\right)A_2 = \frac{\rho_0}{\Lambda}n_0. \tag{A.180}$$

が得られる．式 (A.179) より $A_2 = n_0 - A_1$ を式 (A.180) に代入して，整理すると

$$A_1 = \frac{\rho_0(\lambda\Lambda + \beta - \rho_0)}{\lambda\Lambda\rho_0 - (\beta - \rho_0)^2}n_0, \tag{A.181}$$

$$A_2 = \frac{\beta(\rho_0 - \beta)}{\lambda\Lambda\rho_0 - (\beta - \rho_0)^2}n_0 \tag{A.182}$$

となる．$\Lambda \approx \ell_p \approx 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ であるから，$(\beta - \rho_0 + \lambda\Lambda)^2 \gg 4\rho_0\lambda\Lambda$, $(\beta - \rho_0) \gg \lambda\Lambda$ と考えて，近似的な表現

$$A_1 \simeq -\frac{\rho_0}{\beta - \rho_0}n_0, \tag{A.183}$$

$$A_2 \simeq \frac{\beta}{\beta - \rho_0}n_0 \tag{A.184}$$

が得られて，式 (3.131) が導出される．

次に，係数 B_1, B_2 を求める．先行核濃度の初期条件 (3.145) の左辺に $t=0$ の一般解 (3.130) を代入して

$$\frac{\beta n_0}{\lambda\Lambda} = B_1 + B_2 \tag{A.185}$$

を得る．一般解 (3.130) において $t=0$ で $dC/dt=0$ とすると

$$0 = -\left(\frac{\beta-\rho_0}{\Lambda}\right)B_1 + \left(\frac{\lambda\rho_0}{\beta-\rho_0}\right)B_2 \tag{A.186}$$

となる．式（A.185）より，$B_2 = \beta\rho_0/(\lambda\Lambda) - B_1$ を式 (A.186) に代入して，整理すると

$$B_1 = \frac{\rho_0\beta}{\lambda\Lambda\rho_0 + (\beta-\rho_0)^2}n_0, \tag{A.187}$$

$$B_2 = \frac{(\beta-\rho_0)^2 - \lambda\Lambda\rho_0}{\lambda\Lambda(\beta-\rho_0)^2}\beta n_0 \tag{A.188}$$

となる．係数 A_1, A_2 と同様に，近似的な表現

$$B_1 \simeq \frac{\rho_0\beta}{(\beta-\rho_0)^2}n_0, \tag{A.189}$$

$$B_2 \simeq \frac{\beta}{\lambda\Lambda}n_0 \tag{A.190}$$

が得られて，式 (3.132) が導出される．

A 式 (3.147) の導出

式 (3.146) は非同次微分方程式であるから，まず，その一般解を求める．式変形を簡単にするため右辺の定係数を別の定数 a, b に置き換える: $(\rho_0-\beta)/\Lambda \equiv a,\ \beta n_0/\Lambda \equiv b$. すると式 (3.146) は

$$\frac{dn(t)}{dt} = an(t) + b = a\left(n(t) + \frac{b}{a}\right) \tag{A.191}$$

となる．ここで，$n(t) + b/a \equiv N(t)$ と置くと，$dn/dt = dN/dt$ であるから，式 (A.191）は

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) \tag{A.192}$$

と書ける．その一般解は $N(t) = c\,\mathrm{e}^{at}$($C$: 任意定数) となる．ここで，初期条件 $n(0) = n_0$ を代入すると，$c = n_0 + b/a$ となり，特殊解

$$n(t) = \left(n_0 + \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a} \tag{A.193}$$

が求まる．定数 a, b を元の定数に戻すと

$$n_0 + \frac{b}{a} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_0-\beta}\right)n_0, \tag{A.194}$$

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{\beta}{\rho_0-\beta}\right)n_0 \tag{A.195}$$

となり，式 (3.147) が導出される．

A　式 (3.164) の別の導出

全中性子数の $(1-\beta)$ の分の平均寿命が ℓ_p で，残りの β 分が崩壊までの時間 $1/\lambda$ と ℓ_p の和で与えられる寿命をもつと考えて

$$\begin{aligned} \ell &\equiv \ell_p(1-\beta) + (\frac{1}{\lambda} + \ell_p)\beta \\ &= \ell_p + \frac{\beta}{\lambda} \end{aligned} \tag{A.196}$$

が得られる．

参考文献

[1] R.L. サイム (鈴木淑美訳)「リーゼ･マイトナー：嵐の時代を生き抜いた女性科学者：1878-1968」. シュプリンガー・フェアラーク東京, 2004 年．特に，監訳者の後書き．

[2] O. フリッシュ(松田文夫 訳)「何と少ししか覚えていないことだろう―原子と戦争の時代を生きて」吉岡書店．2003 年．叔母のリーゼ・マイトナーと共にウランの核分裂の発見に加わり，フリッシュ-パイエルスのメモでその連鎖反応が兵器に繋がる可能性を示し，その帰結として原爆実験を見届けた物理学者の物語．

[3] a CD edition of HyperPhysics in HTML, Department of Physics and Astronomy, Georgia State University, http : www.physastr.gsu.edu

[4] R. R ロイ B. P. ニガム「原子核物理学 I」紀伊國屋書店，1972 年．特に，5 章　核分裂，p.195.

[5] 八木浩輔「原子核物理学」朝倉書店．1972 年．特に，10 章　原子核エネルギーの解放．

[6] http : //chemeng.in.coocan.jp/ce/heatcomb.html

[7] Cross-Section Graphs of JENDL-4.0 http : //wwwndc.jaea.go.jp/j40fig/findex.html
U-235: http : //wwwndc.jaea.go.jp/j40fig/pdf/u235_f1.pdf
U-238: http : //wwwndc.jaea.go.jp/j40fig/pdf/u238_f1.pdf
Pu-239: http : //wwwndc.jaea.go.jp/j40fig/pdf/pu239_f1.pdf
U-233: http : //wwwndc.jaea.go.jp/j40fig/pdf/u233_f1.pdf

[8] 古川和男「原発革命」文春新書．2001 年．

[9] 古川和男「原発安全革命」文春新書．2011 年．

[10] 亀井敬史「平和のエネルギー　トリウム原子力」雅粒社．2010 年．

[11] 亀井敬史「平和のエネルギー　トリウム原子力 II」雅粒社．2011 年．

[12] R. マーティン「トリウム原子炉の道ー世界の現況と開発秘史」朝日新聞出版．2013 年．

[13] 講義「原子力概論」
(http : //rokamoto.sakura.ne.jp/education/nuclearpower/nuclearpower.html)
の「原子核の基本的性質」の解説（随時更新予定) 参照．

[14] 有馬朗人「原子と原子核」，朝倉書店，p.164.

[15] R. R ロイ B. P. ニガム「原子核物理学 I」紀伊國屋書店，1972 年．特に，5 章　核分裂，p.195.

[16] 日本アイソトープ協会編「アイソトープ手帳 11 版」 丸善，2011 年，pp.126-127.

[17] 日本アイソトープ協会編「アイソトープ便覧新版」 丸善，1977 年，pp.62-64.

[18] 国際原子力機関 (IAEA), Cumulative Fission Yields,
https : //www−nds.iaea.org/sgnucdat/c3.htm

[19] 八木浩輔「原子核物理学」朝倉書店．1972 年．特に，10 章　原子核エネルギーの解放．

[20] 住田健二「原子力とどうつきあうかー JCO 臨界事故体験」筑摩書房．2000 年．

[21] 日本原子力学会 JCO 事故調査委員会「JCO 事故　その全貌の解明　事実・要因・対応」東海大学出版会．2005 年．

[22] 七沢　潔「東海ムラ臨界事故への道　払われなかった安全コスト」岩波書店．2005 年．

[23] The Effects of Nuclear Weapons, Third Edition
compiled and edited by S. Glasstone and P. Dolan,
prepared and published by United Statets Department of Defence,
1977 https://www.fourmilab.ch/etexts/www/effects/

[24] J. ロートブラット「核戦争と放射線」(小野周監訳，安斎育郎・桂川秀嗣・喜多尾憲助・野口邦和・服部学訳）東京大学出版会，1982 年．表 1(p.7)．原典は *Reactor Physics Constants*, Argonne National Laboratory, United States Atomic Energy Committee, 1964, pp. 585-584.

[25] 石川迪夫「原子炉の暴走ー SL-1 からチェルノブイリまで」日刊工業新聞社．1996 年．

[26] E. フェルミ「原子核物理学」吉岡書店．1968 年．特に，第 9 章　中性子物理学．

[27] E. Fermi, *Fermi lecture on Neutron Physics in 1945*, a revision of Halpern's note in 1951, https://www.orau.org/PTP/Library/neutronfermi.pdf

[28] A. M. Weinberg, E. P. Wigner,*Physical Theory of Neutron Chain Reactors*, University of Chicago Press, 1958. 特に，7 章．

[29] D. Jakeman(住田健二訳)「原子炉の物理」同文書院．1975 年．

[30] 山本賢三・石森富太郎共編「原子力工学概論 (上)」培風館，1976 年．

[31] J. J ドゥデルスタット・L. J. ハミルトン (成田正邦・藤田文行共訳）「原子炉の理論と解析 (上)」現代工学社，1982 年．

[32] Thompson, T. J., Beckerley, J. G., *Technology of nuclear reactor safety*, vol. 1, MIT Press, 1964.

[33] 須田信英「原子炉の動特性と制御」同文書院，1969 年．

[34] 若林二郎「動力炉の動特性 (1)」原子力学会誌, 12 巻, p.284(1970)
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jaesj1959/12/5/12_5_284/_pdf

[35] BWR 出力発振問題検討グループ＊「BWR(沸騰水型原子炉）の出力発振ー核暴走事故の危険性ー」1995 年．＊発行者：石川徳春，片平一郎，河田昌東，小村浩夫，山崎久隆，山本定明．
http://www.rri.kyoto-u.ac.jp/NSRG/seminar/100/PDF/No43-1.pdf

[36] 大山　彰「現代原子力工学 (第 2 版)」オーム社．1985 年．

[37] J. R. ラマーシュ(武田充司・仁科浩二郎共訳）「原子炉の初等理論 (上)」吉岡書店，1995 年．

[38] J. R. ラマーシュ(武田充司・仁科浩二郎共訳）「原子炉の初等理論 (下)」吉岡書店，1995 年．

[39] 成田正邦・澤村晃子「原子炉物理の基礎」現代工学社，1998 年．

[40] J. R. ラマーシュ, A. J. バラッタ (澤田哲生訳)「原子核工学入門 (上)」ピアソン・エデュケーション,2003 年．

[41] J. R. ラマーシュ, A. J. バラッタ (澤田哲生訳)「原子核工学入門 (下)」ピアソン・エデュケーション,2003 年．

[42] 平川直弘, 岩崎智彦「原子炉物理入門」東北大学出版会，2003 年．

[43] 岡嶋成晃・久語輝彦・森貴正「原子炉物理学」オーム社，2012 年．

[44] L. M. クラウス「物理学者はマルがお好き」ハヤカワ文庫・早川書房．2004 年．

[45] E. D. レディッシュ「科学をどう教えるか　アメリカにおける新しい物理教育の実践」丸善出版．2012 年．

[46] 豊田正敏・尾池英夫・湯原豁・水野勝巳共編「原子力発電技術読本」オーム社，1973 年．特に，第 2 章　原子炉．

[47] 森口繁一，宇田川　久，一松　信　著「数学公式集 I」岩波書店，99 ページ．

[48] 深井佑造，シカゴ・パイル 1 号炉成功の鍵を握っていたのは誰か-原子炉物理学から見た人類最初の連鎖反応成功の真相,「科学技術史」(日本科学技術史学会）第 6 号，2002 年 12 月,1-30 頁．

[49] 岡本良治・中原純・森茂康, 核分裂兵器と爆縮技術,「日本の科学者」Vol.19,No.3(1984)21-25. http://rokamoto.sakura.ne.jp/research/okamoto_nakahara_mori_JSA19(1984),21.pdf

[50] M.S. Naschie, *A simplified estimation of the critical mass of fast neutrons reaction*, Chaos, Solitons & Fractals, Volume 11, Issue 13(2000),2099-2102

[51] Nuclear Criticality Safety Engineer Training, Module 2, http://ncsc.llnl.gov/trainingMain.html