

(核分裂連鎖反応のエネルギーの大部分は最後の数世代で発生)nuclearweapon-chain-reaction-qa20190207A.tex

高速中性子による核分裂連鎖反応 (連鎖反応と略記) で解放されるエネルギーは発生する中性子数に比例すると考えてよいとして、以下の問いに順次答えよ。

1. 連鎖反応中のある時刻 t の中性子の数を $N(t)$ とし、1回の核分裂で発生する平均の中性子数を f 、系外に漏洩する平均の中性子数を l とすると、連鎖反応の1世代あたりの 中性子数の増加 は $N(t) \cdot (f - l - 1)$ である。ここで、連鎖反応の1世代時間を t_g とし、 $(f - l - 1) \equiv x$ とおき、簡単のため、 f, l, t_g は時間的に一定と仮定する。この場合の微分方程式を書き、初め中性子個数を N_0 とし、一般解を求めよ。
2. 100%濃縮ウラン 1kg 中の ^{235}U 核の個数を計算せよ。ただし、 ^{235}U のグラム原子量を 235 g、アボガドロ数を $6 \times 10^{23}/\text{mol}$ とする。
3. $N(t)$ は連鎖反応の世代数 ($t/t_g \equiv n_g$) の関数と見なすこともできる。ここで、関数形を $N(t) \equiv \tilde{N}(t_g)$ と置き換える。ここで、 $f = 2.5, l = 0.5, N_0 = 1$ と仮定して、 $n_g = 10, 20, 30, 40, 50, 56$ の場合、それぞれ発生する中性子数が100%濃縮ウラン 1kg 中の ^{235}U 核の個数の何%に当たるか計算し、この結果の物理的な意味を述べよ。(0.057 kg の核分裂性物質がすべて核分裂をすると、1キロトン (1,000 トン TNT 火薬相当) の爆発力が発生するとされている。)

(解答例)

1. 題意より

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &\approx \frac{N(t)x}{t_g} \\ \rightarrow \frac{dN(t)}{N(t)} &= \frac{x}{t_g} dt \\ \rightarrow \log_e N(t) &= \frac{x}{t_g} t + \text{constant} \\ \rightarrow N(t) &= N_0 e^{(xt/t_g)}.\end{aligned}\tag{1}$$

2. 題意より

$$\frac{1\text{kg}}{235\text{g}} \times (6 \times 10^{23})\text{nuclei} \approx 2.56 \times 10^{24} \text{ nuclei}\tag{2}$$

3. 題意より、 $N(t) = \tilde{N}(n_g) = N_0 e^{(xn_g)}$ であるから

$$\tilde{N}(10) = e^{10} \approx 2.2 \times 10^4 \rightarrow \frac{2.2 \times 10^4}{2.56 \times 10^{24}} \times 100 \approx 0 \%,\tag{3}$$

$$\tilde{N}(20) = e^{20} \approx 0.49 \times 10^9 \rightarrow \approx 0 \%, \quad (4)$$

$$\tilde{N}(30) = e^{30} \approx 1.07 \times 10^{13} \rightarrow \quad (5)$$

$$\tilde{N}(40) = e^{40} \approx 2.35 \times 10^{17} \rightarrow \approx 0 \%, \quad (6)$$

$$\tilde{N}(50) = e^{50} \approx 0.52 \times 10^{22} \rightarrow \frac{0.52 \times 10^{22}}{2.56 \times 10^{24}} \times 100 \approx 0.2 \%, \quad (7)$$

$$\tilde{N}(56) = e^{56} \approx 2.08 \times 10^{24} \rightarrow \frac{2.08 \times 10^{24}}{2.56 \times 10^{24}} \times 100 \approx 81\%. \quad (8)$$

このように、爆発エネルギーの 99.9 % 以上は最後の数世代によりもたらされることがわかる。すなわち、通俗的な理解 (= 実は誤解) と対照的に、核分裂性物質の超臨界状態維持のために、初めは微小な領域で始まる連鎖反応のエネルギーによる膨張に勝る継続的な圧縮が必要不可欠であるなど、核兵器こそ極めて高い精度の制御が必要である。

4. 補足：

最後の約 20 世代だけが通常爆弾との差異をもたらす。この事情を理解するために、0.001 キロトン (1 トン TNT 火薬相当) のエネルギー解放に相当する連鎖反応の世代数 n_g は次のように推定できる。

1 キロトン相当の核分裂数は (1.45×10^{23}) と定義されているので、

$$\begin{aligned} e^{n_g} &= (1.45 \times 10^{23}) \times 10^{-3} \\ &= 1.45 \times 10^{20} \\ \rightarrow \log_e(e^{n_g}) &= \log_e(1.45) + 20 \log_e(10) \\ \rightarrow n_g &\approx 46. \end{aligned} \quad (9)$$

逆に言えば、制御が超高精度であれば、かなり高い爆発威力が得られるが、粗雑な装置であれば、核爆発装置としては不完全爆発 (事前爆発) で、極めてわずかの威力しか解放されない。