原子核の基本的性質とその不思議さ[1] [2]

（＊印の項目はやや難しい.）

1　原子核の構成粒子とその不思議さ

原子は原子核という中心とその周囲を運動する電子から構成されている。原子の大きさに比べると、原子核は点状の粒子といえるほどに小さいが、素粒子ではなく、複合粒子である。1932 年のチャドウイック (Chadwick) による中性子の発見、ハイゼンベルク (W. Heisenberg) の論文、電子が核内には存在できないという理論的制限などにより、原子核は正電荷をもつ陽子 (proton) と電荷をもたない中性子 (neutron) から構成されていることが確定した。陽子と中性子を総称して核子 (nucleon) という。現在では、陽子も中性子も素粒子ではなくクォーク（quark）という粒子 3 個から構成されている複合粒子であることが分かっている。陽子と中性子は質量, 電荷の他にも、磁気的性質などに重要な役割を果たすスピンという物理量をもつ。それらを電子と比較して表に表わす。

表 1: 原子核の構成粒子と電子

	質量 [amu]	電気量	スピン [$\hbar$]
陽子	1.007276	e	$\frac{1}{2}$
中性子	1.008665	0	$\frac{1}{2}$
電子	0.000549	$-e$	$\frac{1}{2}$

＊より深い理解のためのノート：

「原子核から電子が放出されるベータ崩壊の現象があるが、このことは電子が原子核の構成要素であることを意味しているだろうか」。

- 電子を原子核内に閉じ込めたとすると、位置と運動量の不確定性関係より電子のエネルギーは数 MeV から数 10MeV にも達するが、実際にベータ崩壊で放出される電子のエネルギーはそれほど高くない。

- さらに、陽子や中性子は電子と同様に（$\hbar$ 単位で）半整数スピンをもつ粒子（フェルミ粒子）である。原子核の全スピンは、質量数 A が偶数の場合は整数スピンを、奇数の場合は半整数スピンをもつことが知られている。核を陽子と電子だけから構成しようとすると、質量数 A、原子番号 Z の核は、全スピンの大きさから、陽子数が A、電子数が $(A-Z)$ でなければならない。陽子も電子もスピンは 1/2 であるから、全体の系は $(2A-Z)$ が偶数ならば整数の全スピン、奇数ならば半整数の全ス

[1] ファイル名=nucleus-properties-20201215C.tex

[2] 作成者：岡本良治 (九州工業大学名誉教授). 大学工学部 3，4 年生向け講義「原子力概論」用の資料として作成しました. そのために制約があり，配慮もしています. 誤り，説明の分かりにくい点をお気づきの場合，本ファイル名 (特に，作業年月日を示す数値の部分) と該当箇所を特定して，okamoto.ryoji.munakata_at_gmail.com (_at_ を@に修正後）に電子メールで御連絡願えれば，助かります.

ピンとなり、観測事実と一致しない。たとえば、$^{16}_{8}$O 核が 16 個の陽子と 8 個の電子から構成されると仮定すると、全フェルミ粒子数は偶数である。したがって $^{16}_{8}$O 核の全スピンは 0 または整数であることが予想される。ところが、測定値は 0 であるから矛盾はない。ところが、$^{14}_{7}$N 核が 14 個の陽子と 7 個の電子からできているとすると全フェルミ粒子数は奇数となり、全スピンは（1/2）の奇数倍であることが予想される。しかし、$^{14}_{7}$N 核の全スピンの測定値は 1 であり、実験事実と矛盾する。したがって、質量数 A, 原子番号 Z の原子核が陽子 A 個と電子 $(A-Z)$ 個からできているという考えはすてなければならない。。

「陽子と中性子の寿命はどれだけか」

- 近年、陽子の寿命を測定する実験が行われているが、非常に長い寿命（10^{33} 年以上）と考えられているので、原子核物理学、原子核工学においては安定な粒子と見なしてもよい。
- 自由な中性子、すなわち単独の中性子は半減期 11.7 分（平均寿命約 16.8 分）で陽子、電子とニュートリーノ（中性微子、neutrino）に壊変（ベータ崩壊）する。ただし、核内の中性子は一般には安定で、中性子数が陽子数に比べて多い核ではベータ崩壊する。

中性子の寿命の謎

過去 10 年間，２つの精密実験による自由な中性子の寿命の測定結果が，測定誤差に比べて，約 9 秒という有意の差があり，一致していない．この食い違いは測定誤差によるのか，それとも奥深い謎が潜んでいるのか？自由な中性子は，陽子を放出する β 崩壊以外に，第二の崩壊プロセスがあるかもしれない．通常の物質と相互作用をしない「ミラー中性子」に変わる，陽子を放出しない崩壊プロセスで，それ故に，中性子が消えたように見える可能性がある．[1]

なぜ中性子の寿命が問題なのか？　中性子の崩壊プロセスは，原子核で働く「弱い力」の作用で生じるもっとも単純な例の 1 つである．その「弱い力」を本当に理解するには中性子の寿命を精確に知る必要がある．さらに，中性子の寿命は，宇宙がビッグバンで誕生した後，水素やヘリウムなどの軽い元素がどのように形成されたかを決定づける要因となっている．

中性子の寿命については，こうした実験結果の食い違い以外に．いくつかの謎があり，そうした謎は中性子の内部構造にその起源があると考えられる．この謎の 1 つは中性子と陽子が電荷の有無以外に，質量がほんの少し違うこと．より本質的には，アップ・クォークとダウン・クォークの質量差．もう一つの謎は,「弱い力」を介したアップ・クォークとダウン・クォークの入れ替わりの度合いである．入れ替わり易いほど，アップ・クォークとダウン・クォークが入れ替わる頻度が高くなるので，崩壊が起き易く，中性子の寿命が短くなる.「弱い力」を介した入れ替わり易さの度合いは,（2008 年ノーベル物理学賞を受賞した）「小林-益川行列」により定められている.「小林-益川行列」により定められているアップ・クォークとダウン・クォークが入れ替わり易さの度合いは，中性子の寿命からも，それ以

外の物理現象からも導き出されているが，両者が一致しない場合がある．この不一致は何を意味するのか？　測定誤差以外の要因と考えられるのは「小林-益川行列」が立脚する小林-益川理論，ひいては同理論を素粒子の標準モデルにはない新現象が関与している可能性だ．[2]

2　原子核の分類

原子核の種類は陽子数 Z,中性子数 N,およびそれらの和として定義される質量数 (mass number)$A = Z + N$により分類され、核種 (nuclide)と呼ばれ、つぎのように表わされる。

$$ {}^{\text{質量数}}_{\text{陽子数}}\text{元素名} \qquad {}^{A}_{Z}\text{Element} \tag{2.1}$$

例えば、炭素12の原子核を ${}^{12}_{6}\text{C}$ と表わす。陽子数 Z が同じで、中性子数が異なる原子（核）同士をお互いに同位元素（isotope, アイソトープ、同位体、同位核) であるという。中性原子では陽子数は原子の電子数と同じで、iso とはギリシャ語で（周期律表の）同じ位置にあるという意味である。天然の物質を構成する原子核には一般には複数の同位核がある割合（存在比, abundance ratio）で含まれている。ここで、三

表 2: 例：水素の同位元素（同位体）

同位核	名称（原子としての名称）	存在比 [%]
${}^{1}_{1}\text{H}$	陽子（水素、H）	99.985
${}^{2}_{1}\text{H}$	重陽子（重水素、デューテリウム、D)	0.015
${}^{3}_{1}\text{H}$	三重陽子（三重水素、トリチウム、T)	0.000

重水素 (tritium) は天然には存在しないが、後の議論にも重要な同位核であるので、紹介した。重陽子を原子核とする同位元素を重水素といい、重水素（D）原子２個と酸素原子（O）１個と結合してできる分子 (D_2O) から構成される水を重水（heavy water）という。この呼称に対応して、陽子を原子核とする水素原子（H）２個と酸素１個と結合してできる分子 (H_2O) から構成される通常の水を軽水（light water）と呼ぶことがある。この呼称は軽水型熱中性子炉（略称、軽水炉)のように原子力発電システムの分類において使用されるの通例である。別項で説明されるように、この例の天然ウラン中のが含有率の低いウラン 235 が原子力発電などにおいて重要な役割を果たす。
また、質量数が同じで、中性子数が異なる原子核同士を同重体（アイソバー、isobar）という。さらに、中性子数が同じで陽子数が異なる原子核同士を同中性子体（または同調体、isotone）という。また、核種を Z, N, A だけではなく、励起状態についても区別する場合もある。

表 3: 例：ウランの同位元素（同位体）

同位核	名称	存在比 [%]
$^{238}_{92}\mathrm{U}$	ウラン 238	99.274
$^{235}_{92}\mathrm{U}$	ウラン 235	0.720
$^{236}_{92}\mathrm{U}$	ウラン 236	0.006

3 原子核の基本的性質

(a) **原子核の大きさと密度**

複数種類の実験結果によれば、原子核の密度 ρ は原子核によらずほぼ一定であり

$$\begin{aligned}\rho &= 0.17\mathrm{nucleon} \quad \mathrm{fm}^{-3} \\ &\approx 2\times 10^{11}\mathrm{kg/cm^3} \quad (1\mathrm{fm} \equiv 10^{-15}\mathrm{m})\end{aligned} \tag{3.1}$$

である。この値は $1\mathrm{cm}^3$ あたり 1 億トン程度という非常に大きなものである。形状は質量数 A に依存して若干の変化はあるが、多くの原子核は近似的には球形であり、半径 R は

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (r_0 \approx 1.1 - 1.5\mathrm{fm}, \quad 1\mathrm{fm} \equiv 10^{-15}\mathrm{m}) \tag{3.2}$$

のように表わされる。例えば、$^{125}_{52}\mathrm{Te}$ という原子核の半径 $R \approx 5.5\mathrm{fm}$ である。125 個の核子数を考えれば原子核の密度が極端に高いことが示唆される。また、体積 V は

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}r_0^3 A \tag{3.3}$$

のように、質量数に比例して大きくなる。この意味で、原子核の平均的性質は液体と類似しているので、飽和性（saturation property）があるといわれる。一方、原子の場合は、その密度は質量によりかなり変化する。

(＊参考までに：核子の大きさは 1fm であり、電子は 0.1fm 程度までは他の粒子が接近できて、内部構造はないと考えられている。すなわち、この程度の距離では点電荷として扱える。)

(b) **原子核の表面張力**

別項の結合エネルギーの表面項から推定される表面張力の大きさは $3.80\times 10^{32}\mathrm{eV/cm^2}$ である。水の表面張力を同じ単位で表わせば約 $4.60\times10^{13}\mathrm{eV/cm^2}$ であり、原子核の表面はかなり明確であることが示唆される。

(c) **原子核の圧縮率**

実験によれば、原子核の圧縮率をエネルギー単位で表わせば、約 200MeV で

あることが分かっている。水の圧縮率は約 4eV であると比較すれば、極めて圧縮しにくいことを意味し、ここでも飽和性があるといえる。

(d) **核内の核子の平均速度と運動エネルギー**
実験と理論的推定によれば、核内の核子の平均の運動エネルギーは 25MeV、その速度は光速度の約 6 分の 1 程度にも達している。

(e) **核内の核子の平均自由行程**
多粒子系では一般に粒子の衝突（散乱）が頻繁に起こる。1 回の衝突をして次に衝突するまでの平均の距離を平均自由行程（mean-free path）という。実験と理論的推定によれば、核内の核子の平均自由行程は少なくとも原子核の直径程度であることが分かっている。

(f) **原子核現象の平均的時間スケール**
陽子が核外から運動エネルギー 10MeV で入射するという典型的な原子核反応を考えると、陽子が原子核の直径程度を通過する時間は 10^{-22}s 程度で、原子の世界における典型的時間に比べて非常に短い。

(g) **全角運動量（total angular momentum）**
原子核は孤立系であるので、核子の固有角運動量（スピン、spin）とその原子核内で運動による軌道角運動量のベクトル和は保存される。原子核の全角運動量は核子数が偶数か奇数かにより $\hbar$ 単位を単位として整数か半整数の値をとる。

(h) **偶奇性またはパリティ(parity)**
量子力学では粒子が空間中の 1 点に存在する確率は波動関数の絶対値の 2 乗に比例する。確率は空間座標の選び方には依存しない。しかし、波動関数は必ずしもそうではない。偶関数奇関数の関係と類似して、原子核の波動関数で全核子の空間座標の符号を反対にした場合に波動関数の符号が変化しない場合にはパリティ偶またはプラス、変化する場合にはパリティ奇またはマイナスという。

(i) **磁気モーメント（magnetic moment)**
原子核の磁気モーメントは原子核の重心の周りの核子の軌道運動と核子の固有磁気モーメントによって生じる。

(j) **電気四重極モーメント（electric quadrupole moment）**
原子核は厳密には球形ではなく、電気四重極モーメントは荷電の分布の歪みの度合いを示す物理量のひとつである。

4　原子核に働く力とその特徴

原子核の基本的構成要素は陽子と中性子である。原子核の構成要素にかかわる基本的な力は次の通りである。

1. **核力 (nuclear force）**
   核子間に働く力で、近距離で強い斥力、中間的距離でかなり強い引力であり、原子核の大きさ程度より長い距離ではゼロになる短距離力である。電荷の有無には基本的には依存しない（荷電独立性、荷電不変性）。粒子間の相対距離だけできまる中心力成分だけではなく、非中心力成分（テンソル力成分）もあるので、2粒子の (量子力学的な）状態にも依存する。陽子と中性子を入れ替える交換力的性質もある。

   (a) 2陽子系は不安定: 理由：

      i. 核力（の引力部分）は短距離でしか作用しない,
      ii. 電気的反発力が働く,
      iii. ２粒子が狭いところに閉じ込められると（不確定性関係により）, 運動エネルギーが大きくなり、結果的に束縛エネルギーが減少,
      iv. 同種の粒子は固有スピンの向きは反対になる（基底状態では）,（合成スピン，S=0)　パウリの排他原理のため,S＝0では核力のテンソル力成分はゼロ.

   (b) ２中性子系も不安定！
      理由：

      i. 核力（の引力部分）は短距離でしか作用しない，
      ii. ２粒子が狭いところに閉じ込められると（不確定性関係により）運動エネルギーが大きくなり、結果的に束縛エネルギーが減少，
      iii. 同種の粒子は固有スピンの向きは反対になる (基底状態では)(S=0) パウリの排他原理のため，S＝0では核力のテンソル成分はゼロ.

   (c) 陽子・中性子系（重陽子）のみが安定！
      理由

      i. 核力（の引力部分）は短距離でしか作用しない,
      ii. ２粒子が狭いところに閉じ込められると（不確定性関係により）運動エネルギーが大きくなり、結果的に束縛
      iii. エネルギーが減少, 異種の粒子は固有スピンの向きは同じ向きも可能,パウリの排他原理は働かないため. S＝1では核力のテンソル成分が存在する！

2. **電気力 (electric force)**:無限遠方にも到達する長距離力で、粒子間の相対距離だけできまる中心力である。原子核内の構成粒子では、陽子間のみに働く

斥力である。軽い核においては重要ではなく、核力に比べて脇役的な役割を果すにすぎない。しかし、U, Pu のような重い核における核分裂については, 核力とともに主要な役割を果す。

3. **弱い力 (weak interaction)**
   短距離で働くがかなり弱い。ベータ崩壊を支配する力である。

4. **重力 (gravitation)**:
   広範囲で働くが、原子核の世界では無視できるほど小さい。

5. **力の相対的強さ**
   陽子間に作用する核力を基準にとると種々の力の相対的な大きさは表のとうりである。したがって、原子核の問題においては重力の影響は直接には現れないと考えてよい。

表 4: 種々の力の相対的強さ

力の種類	相対的強さ
強い相互作用	1
電磁的相互作用	10^{-2}
弱い相互作用	10^{-14}
重力相互作用	10^{-38}

5　原子核の結合エネルギーと分離エネルギー

5.1　質量とエネルギーの等価・相互転換

付録 A に要点が記されている特殊相対論によれば、粒子が静止しているときの質量（静止質量、rest mass ＝通常の意味の質量）を m_0 とすると、質量は一定ではなく、速さに依存する。速さ v の粒子の質量 m は

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \tag{5.1}$$

と表わされる。ここで c は真空中の光速度である。さらにこのときの粒子のエネルギー E は

$$E = mc^2 \tag{5.2}$$

で示される。ここで (5.2) はニュートン力学におけるエネルギーの表現とは異なるので、その意味を調べてみよう。光速度に比べて粒子速度が小さく、$(v/c)^2$ が十分に小さい場合

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\
&\approx m_0 c^2[1-(-\frac{1}{2})(\frac{v}{c})^2] \\
&\approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

すなわち、粒子の相対論的エネルギー E には運動エネルギー $\frac{1}{2}m_0v^2$ だけではなく静止エネルギー（rest energy）m_0c^2 も含まれる。したがって、一般には、粒子の運動エネルギー（kinetic energy）K は次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
K &= E - m_0 c^2 \\
&= (m - m_0)c^2
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

これは質量の変化分だけ運動エネルギーになることを意味している。孤立系での状態変化の際に、相対論的エネルギー E 保存されるが、（静止）質量 m_0 は一般には保存されない。すなわち、ニュートン力学ではエネルギー保存の法則と質量保存の法則は各々独立したものと考えられていたが、特殊相対論 () によると質量とエネルギーは（光速度 c を媒介にして）等価であり相互に転換することができる。

原子核物理学や原子核工学（原子力工学）においては、エネルギーの単位として、電子ボルト eV, keV, MeV, 質量の単位として、MeV/c^2 や原子質量単位 amu（= atomic mass unit）を用いることが多い。これらと通常の単位系である MKS 単位（SI 単位）との関係は次の通りである。

$$
\begin{aligned}
1\mathrm{eV} &= 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{joule}, \\
1\mathrm{MeV} &= 10^6\mathrm{eV}, \\
1\mathrm{kg} &= 5.611 \times 10^{29}\mathrm{MeV/c^2} = 6.02 \times 10^{23}\mathrm{amu}, \\
1\mathrm{amu} &\equiv \frac{1\mathrm{g}}{N_\mathrm{A}} = 1.6605 \times 10^{-27}\mathrm{kg} \\
&= 931.49432\mathrm{MeV/c^2}
\end{aligned}
$$

よく使用する電子、陽子、水素原子、中性子の質量はこれらの単位で

$$\text{電子の質量：} \quad m_\mathrm{e} = 0.91093897 \times 10^{-30}\ \mathrm{kg} \tag{5.5}$$

$$= 0.000548\mathrm{amu} = 0.510459\mathrm{MeV/c^2}, \tag{5.6}$$

$$\text{陽子の質量：} \quad m_\mathrm{p} = 1.6726231 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} \tag{5.7}$$

$$= 1.007277\mathrm{amu} = 938.272804\mathrm{MeV/c^2}, \tag{5.8}$$

$$\approx 1840 \times m_{\mathrm{e}}, \tag{5.9}$$

$$\text{水素原子の質量：}\quad m_{\mathrm{H}} = 1.007825\mathrm{amu} = 938.783263\mathrm{MeV/c^2}, \tag{5.10}$$

$$\approx 1840 \times m_{\mathrm{e}}, \tag{5.11}$$

$$\text{中性子の質量：}\quad m_{\mathrm{n}} = 1.6749286 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} \tag{5.12}$$

$$= 1.008665\mathrm{amu} = 939.565718\mathrm{MeV/c^2} \tag{5.13}$$

$$\approx (m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}}) \tag{5.14}$$

$$\approx 1840 \times m_{\mathrm{e}}. \tag{5.15}$$

と表わされる。ここで、水素原子の質量も紹介した理由は、原子核の質量は通常はその中性原子の質量として与えられるので、結合エネルギーを計算する場合には水素原子の質量が陽子の質量として代用されるという事情を考慮したためである。以下、ことわらない限り、そのように考える。（ここでは、水素原子核である陽子と電子の結合エネルギー約 13.6eV を無視した。）

5.2　複合系の結合エネルギー、質量欠損と分離エネルギー

一般に、2 個以上の粒子系（多体系）は相互作用により束縛された複合系（結合系）となる。この複合粒子系が安定的に存在するためには、そのシステムの、質量エネルギーを含む全エネルギーが極小でなければならない。例えば、地球と月は重力により、原子は原子核と電子が電気力により、原子核の場合には核子が核力によってそれぞれの系を形成している。複合粒子系は全エネルギーの高い状態

から低い状態に遷移する。（注 1 ）結合系をその構成要素に分解するために与えねばならない最小エネルギー、すなわち静止した構成要素に分解するためのエネルギーを結合エネルギー（binding energy, $BE, B, B.E., E_{\mathrm{B}}$ ）という。質量とエネルギーの関係は粒子が素粒子か複合粒子かによらず成立する。（静止）質量がそれ

ぞれ m_1, m_2 の粒子から（静止）質量 M の結合系がつくられるときの結合エネルギーは次のように表わされる。[3]

$$\begin{aligned} Mc^2 + E_B &= m_1c^2 + m_2c^2 \\ \rightarrow \quad E_B &= (m_1 + m_2 - M)c^2 \\ &= \Delta Mc^2, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\Delta M \equiv m_1 + m_2 - M \quad (\text{質量欠損（mass defect）}) \tag{5.17}$$

$$\frac{\Delta M}{M} \times 100 : \quad (\text{質量欠損率}(\%)) \tag{5.18}$$

[3] エネルギー的には低くても遷移できない場合がある。エネルギー以外の条件、例えば、運動量保存則や角運動量保存則が満たされない場合には遷移できない。

逆に、二つ以上の構成要素がその結合系を構成する場合には、結合エネルギーに等しいエネルギーが放出される。結合エネルギーがより大きい複合粒子系はより安定である。一般に、（静止）質量がそれぞれ $m_1, m_2, \cdots, m_n$ の粒子から（静止）質量 M の結合系がつくられるときの結合エネルギーは次のように表わされる。

$$
\begin{aligned}
E_B &= (m_1 + m_2 + \cdots + m_n - M)c^2 \qquad (5.19)\\
&= \Delta M c^2,
\end{aligned}
$$

$$\Delta M \equiv m_1 + m_2 + \cdots + m_n - M, \quad \text{(質量欠損（mass defect))} \qquad (5.20)$$

$$\frac{\Delta M}{M} \times 100 : \quad \text{(質量欠損率(\%))} \qquad (5.21)$$

例えば、炭酸ガス（二酸化炭素）分子の結合エネルギーは、次のように発熱反応という形でエネルギーが放出される。

$$\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} + 2.96\mathrm{eV} \qquad (5.22)$$

ここで，原子の結合エネルギーは

$$E_B = [(Zm_\mathrm{p} + Nm_\mathrm{n} + Zm_\mathrm{e}) - M(Z, N)]c^2 \qquad (5.23)$$

Z : 原子番号、陽子数

N : 中性子数

m_p、$m_\mathrm{n}, m_\mathrm{e}$: 陽子質量、中性子質量、電子質量 (5.24)

$M(Z, N)$: 原子番号 Z, 中性子数 N の中性原子の質量 (5.25)

と表わされる。この場合、質量欠損率は約 0.7×10^{-10} % となり、化学反応における (近似的) 質量保存法則のが十分高い精度で成立していることがわかる。陽子と電子間の結合エネルギー（13.6eV）は原子核内の核子間の結合エネルギー（MeV 単位）に比べて非常に小さく無視できる。

5.3 原子核の質量欠損と結合エネルギー

原子核の結合エネルギーは通常、原子質量の実験値を用いて計算される。これは一見不思議に思える。その理由の一つは、通常の物質は非常に高い精度で電気的に中性が保持されているが、陽子や原子核は、電荷をもつために、単独で分離して質量を測定することが非常に困難であるのである。さらに、以下述べるように、電子の結合エネルギーが原子核の世界の典型的エネルギーに比べて圧倒的に小さいために無視できるという事情がある。

質量数 A、陽子数 Z の原子核 $({}^A_Z\mathrm{X})$、原子核の質量 $M_\mathrm{nuc}({}^A_Z\mathrm{X})$、電子の質量 m_e、陽子の質量 m_p、中性子の質量 m_n, 中性原子の質量 $M_\mathrm{atom}({}^A_Z\mathrm{X})$、$i$ 番目の電子の結合エネルギーを $B_{\mathrm{e},i}$ と記すことにする。中性原子の質量 $M_\mathrm{atom}({}^A_Z\mathrm{X})$ は

$$M_\mathrm{atom}({}^A_Z\mathrm{X}) \cdot c^2 \equiv M_\mathrm{nuc}({}^A_Z\mathrm{X}) \cdot c^2 + Zm_\mathrm{e} \cdot c^2 - \sum_{i=1}^{Z} B_{\mathrm{e},i} \qquad (5.26)$$

と表される。特に，水素原子の場合、$(A=1, Z=1, \mathrm{XH})$；

$$M_{\mathrm{atom}}({}^{1}_{1}\mathrm{H})\cdot c^2 = m_{\mathrm{p}}\cdot c^2 + m_{\mathrm{e}}\cdot c^2 - B_{\mathrm{e},1} \tag{5.27}$$

$$\approx m_{\mathrm{p}}\cdot c^2 + m_{\mathrm{e}}\cdot c^2 \tag{5.28}$$

$$\rightarrow M_{\mathrm{atom}}({}^{1}_{1}\mathrm{H}) \approx m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}} \tag{5.29}$$

となる。　ここで、$m_{\mathrm{p}}\cdot c^2 \approx 940\times 10\ 6\ \mathrm{eV}, m_{\mathrm{e}}\cdot c^2 \approx 0.511\times 10\ 6\ \mathrm{eV}, B_{\mathrm{e},1} \approx 13.6\ \mathrm{eV}$ という事実を考慮した。

式 (5.26) より

$$M_{\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})\cdot c^2 = M_{\mathrm{atom}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})\cdot c^2 - Zm_{\mathrm{e}}\cdot c^2 + \sum_{i=1}^{Z} B_{\mathrm{e},i} \tag{5.30}$$

$$\rightarrow M_{\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) \approx M_{\mathrm{atom}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) - Zm_{\mathrm{e}} \tag{5.31}$$

と表される。

原子核の結合エネルギー $E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})$ は本来

$$E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) \equiv [Z\ m_{\mathrm{p}} + (A-Z)m_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})]\cdot c^2 \tag{5.32}$$

のように定義される。しかし、式 (5.27) と式 (5.30) を用いると、$E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})$ は次のように近似的に表現される。

$$E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) = \left[Z\left(M_{\mathrm{atom}}({}^{1}_{1}\mathrm{H}) - m_{\mathrm{e}} + \frac{B_{\mathrm{e},1}}{c^2}\right) + (A-Z)m_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{atom}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) + Zm_{\mathrm{e}}\right]\cdot c^2 - \sum_{i=1}^{Z} B_{\mathrm{e},i} \tag{5.33}$$

$$\rightarrow E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) \approx [ZM_{\mathrm{atom}}({}^{1}_{1}\mathrm{H}) + (A-Z)m_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{atom}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})]\cdot c^2. \tag{5.34}$$

このように、原子核の結合エネルギーが水素原子集団の質量と中性子集団の質量の和から考える原子核を含む中性原子の質量を引くことにより表される。この事実により、中性原子の質量を用いて、原子核の結合エネルギー $E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})$ が計算されるのである。

なお、質量欠損[4] ΔM と質量欠損率を

$$\Delta M \equiv ZM_{\mathrm{atom}}({}^{1}_{1}\mathrm{H}) + (A-Z)m_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{atom}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}), \tag{5.35}$$

$$\frac{\Delta M}{M_{\mathrm{atom}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})}\times 100 : [\%] \tag{5.36}$$

により定義する。

なお、結合エネルギーと類似の物理量として質量偏差[5]が次のように定義される。

$$(\text{質量偏差}) \equiv [M_{\mathrm{atom}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) - A\cdot \mathrm{amu}]c^2, \tag{5.37}$$

$$M_{\mathrm{atom}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})c^2 = (\text{質量偏差}) + A\cdot \mathrm{amu}c^2. \tag{5.38}$$

[4] mass defect

[5] mass excess

式 (5.37) により定義された質量偏差は，その名前から生じる印象とは異なり，単位はエネルギーであることに注意せよ．なお，文献 [13] により質量偏差を「$M(A,Z)$ を原子質量単位 (amu) で表したとき、整数値である質量数 A との差 $M(A,Z)/\mathrm{amu}-A$ と定義されている。

中性原子質量の測定値 [原子質量単位 (amu)] は [15] または [16] にアクセスすれば得られる。

結合エネルギーから導かれる類似の物理量として，1 個の中性子あるいは陽子を原子核から引き離すのに必要なエネルギー、すなわち中性子の分離エネルギー [6] S_n と陽子の分離エネルギー S_p が考えられ、それぞれ次のように定義される。

$$S_\mathrm{n}(A,Z) \equiv E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) - E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A-1}_{Z}\mathrm{X}) \tag{5.39}$$
$$= [m_\mathrm{n} + M_\mathrm{atom}({}^{A-1}_{Z}\mathrm{X}) - M_\mathrm{atom}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})]c^2, \tag{5.40}$$
$$S_\mathrm{p}(A,Z) \equiv E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) - E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A-1}_{Z-1}\mathrm{X}) \tag{5.41}$$
$$= [M_\mathrm{atom}({}^{1}_{1}\mathrm{H}) + M_\mathrm{atom}({}^{A-1}_{Z-1}\mathrm{X}) - M_\mathrm{atom}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})]c^2. \tag{5.42}$$

結合という観点から見れば、1 個の中性子 (陽子) が原子核に結合したために生じるエネルギーであるから，中性子 (陽子) 結合エネルギーとよんでよい。なお、S_n あるいは S_p は、原子の場合の (軌道電子の) 電離ポテンシャルに相当する量である [13]。

例 (a) 重陽子の結合エネルギー
水素原子の質量 $m_\mathrm{H} = 1.007825$ amu、中性子の質量 $m_\mathrm{n} = 1.008665$ amu、重陽子の質量 $M_\mathrm{atom}({}^{2}_{1}\mathrm{H}) = 2.014103$ amu を質量欠損、結合エネルギーの定義式に代入すると

$$\Delta M = m_\mathrm{H} + m_\mathrm{n} - M_\mathrm{atom}({}^{2}_{1}\mathrm{H})$$
$$= 0.002387\mathrm{amu}, \tag{5.43}$$
$$\frac{\Delta M}{m_\mathrm{d}} \approx 0.0012, \tag{5.44}$$
$$E_{B,[\mathrm{nucl}]}({}^{2}_{1}\mathrm{H}) = = [m_\mathrm{H} + m_\mathrm{n} - M_\mathrm{atom}({}^{2}_{1}\mathrm{H})]c^2$$
$$= 0.002387\ \mathrm{amu}c^2 \quad (1\mathrm{amu} = 931.49432\mathrm{MeV/c^2})$$
$$= 2.2\ \mathrm{MeV}. \tag{5.45}$$

例 (b) ウラン 235（${}^{235}_{92}\mathrm{U}$）の結合エネルギー
水素原子の質量 $m_\mathrm{H} = 1.007825$amu、中性子の質量 $m_\mathrm{n} = 1.008665$amu, ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ の質量 $M_\mathrm{atom}({}^{143}_{92}\mathrm{U}) = 235.04394$ amu を質量欠損、結合エネルギーの定義式に代入すると

$$\Delta M = 92 \times m_\mathrm{H} + 143 \times m_\mathrm{n} - M_\mathrm{atom}({}^{143}_{92}\mathrm{U})$$

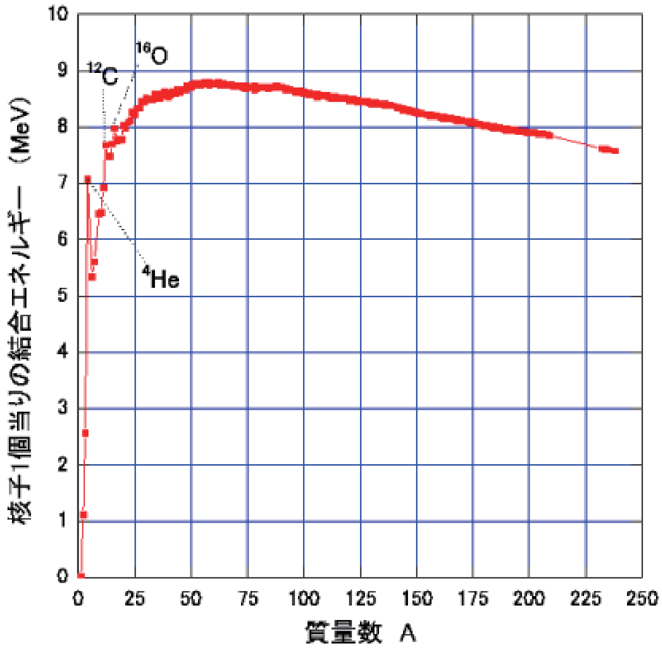
[6] separation energy

$$
\begin{aligned}
&= 1.91505 \text{ amu}, && (5.46)\\
\frac{\Delta M}{M} &\approx 0.0081, && (5.47)\\
E_B((^{235}_{92}\mathrm{U}) &= \Delta M c^2 && \\
&= 1.91505 \mathrm{amu} c^2 \quad (1\mathrm{amu} = 931.49432 \mathrm{MeV/c^2}) && \\
&= 1782.91 \text{ MeV}. && (5.48)
\end{aligned}
$$

5.4 核子当たりの結合エネルギーと半経験的質量公式

核子あたりの結合エネルギーは 1 個の核子を原子核から取り除くのに必要なエネルギーであり平均結合エネルギーである。核子あたりの結合エネルギー測定値の質量数依存性を図 1 に示す。核子あたりの結合エネルギーの質量数 A への依存

図 1: 核子あたりの結合エネルギーの質量数 A への依存性。出典 [9]



性にはつぎのような特徴がある。

(a) $E_B(A, Z)/A$ の大きさは、軽い核を除くとほぼ 8MeV であり、質量欠損率にして約 0.85% である。この性質を結合エネルギーの飽和性という。

(b) $E_B(Z, N)/A$ の値は、軽い核でも重い核でも、平均値よりも小さく $A \approx 60$ の核種, すなわち鉄の同位核あたりで最大になる。この事実は軽い核は融合することにより、また重い核は分裂することにより、結合エネルギーの余剰分が放出されることを意味する。

(c) $Z, N = 8, 20, \cdots$ などの特別な陽子数または中性子数（魔法の数、magic number）の核種でそれらの周辺の核種に比べてピークがある。（この性質は原子における電子配位の殻構造があることと類似して、原子核内の核子にも殻構造が存在することを示唆していて、1950 年代初めに立証された。）

自然界で飽和性を示す典型的な系は液体である。ワィツェッカー (1935 年）とベーテら（Bethe and Bacher,1936 年) は独立に、孤立系としての原子核と液滴との類似性（液滴模型）とそれ以外の補正項まで考慮して結合エネルギーの半経験的公式（ベーテ・ワィツェッカーの公式、Bethe-Weizaecker formula）を導出した。それは次のように、体積項、表面項、非対称項、クーロン項と奇偶補正項からなる。

(a) **体積項 (volume term)** 飽和性から結合エネルギーの主成分は体積に比例する。原子核の半径が質量数の 1/3 乗（$A^{1/3}$）に比例するので、体積は A に比例する。

(b) **表面項 (surface term)**
液体は表面張力をもっている。表面張力は単位表面積あたりのエネルギーである。

(c) **クーロン項 (coulomb term)**
原子核内の陽子間の電気的反発力により結合エネルギーを減少させる。

(d) **非対称項 (asymmetry term)**
中性子数と陽子数が同じほど安定である。

(e) **奇偶補正項（または対効果項）**
中性子数、陽子数ともに偶数の原子核がもっとも安定で、次に安定なのはどちらかが偶数で他が奇数の場合である。中性子数、陽子数ともに奇数の原子核がもっとも不安定である。これらを次のようにまとめることができる。

$$E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) = c_v A - c_s A^{2/3} - c_a \frac{(A-2Z)^2}{A} - c_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \delta(A,Z). \tag{5.49}$$

ここで右辺の各項の係数は次のように与えられる [8]：

$$c_v = 15.56\mathrm{MeV},\ c_s = 17.23\mathrm{MeV},\ c_a = 23.285\mathrm{MeV},\ c_c = 0.697\mathrm{MeV}, \tag{5.50}$$

$$\delta(A,Z) = \begin{cases} \frac{130}{A}\mathrm{MeV} & (Z, A\ \text{ともに偶数}) \\ 0 & (A\ \text{が奇数}) \\ -\frac{130}{A}\mathrm{MeV} & (Z, A\ \text{ともに奇数}) \end{cases}$$

[例題]
${}^{235}_{92}$U 核の結合エネルギーをベーテ・ワィツェッカーの公式でもとめ、上述の各項の相対的な大きさに注意して測定値 (1783.9 MeV) と比べて，相対誤差を計算せよ。
（解）

$$E_{B,\mathrm{nuc}}({}^{235}_{92}\mathrm{U}) = [15.56 \times 235 - 17.23 \times (235)^{2/3} - 23.285 \times \frac{(143-92)^2}{235}$$

$$
\begin{aligned}
&-0.697 \times \frac{(92)^2}{(235)^{2/3}}] \text{ MeV} \\
&= [3656.60 - 656.14 - 257.72 - 955.99] \text{ MeV} \\
&= 1786.75 \text{ MeV}. \qquad (5.51)
\end{aligned}
$$

ここで、計算値と測定値との誤差は2.85 MeVで、相対誤差は$(2.85/1783.9)\times 100 = 0.15\%$である。

一般に、右辺の各項の係数は測定値をできるだけよく再現するように最小二乗法で決められるが、他の提案もある。ここではグリーン (Green, Rev.Mod.Phys.30(1958),569.) による値も記す。

$$
E_B({}^A_Z\mathrm{X}) = c_v A - c_s A^{2/3} - c_a \frac{[(A/2) - Z]^2}{A} - c_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \delta(A, Z), \qquad (5.52)
$$

$$
c_v = 15.826\mathrm{MeV},\ \ c_s = 17.907\mathrm{MeV},\ \ c_a = 23.517\mathrm{MeV},\ \ c_c = 0.7183\mathrm{MeV}, \qquad (5.53)
$$

$$
\delta(A, Z) = \begin{cases} \frac{11.2}{A^{1/2}}\mathrm{MeV} & (Z, A\ \text{ともに偶数}) \\ 0 & (A\ \text{が奇数}) \\ -\frac{11.2}{A^{1/2}}\mathrm{MeV} & (Z, A\ \text{ともに奇数}) \end{cases}
$$

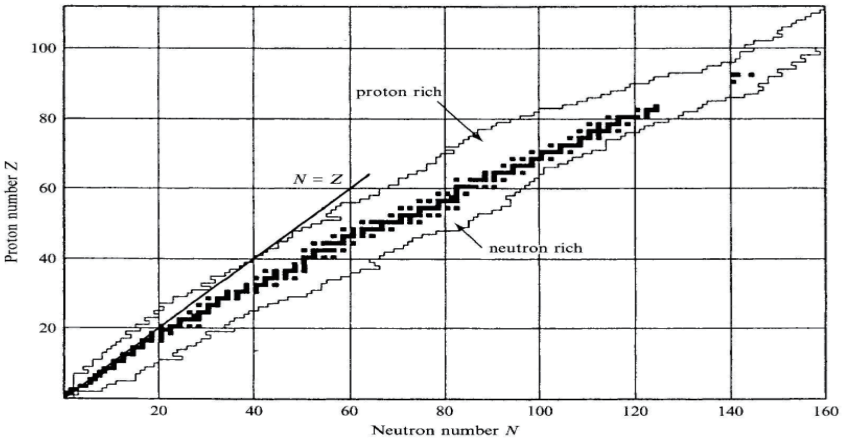
6　核図表ー原子核の安定性と存在領域

自然界における原子核の出現とそれらの相対的な安定性は原子核に係わる現象の理解にとって基本的に重要である。図7に示されているように、軽い核はほぼ$Z = N$であるが、中重核や重い核では$N > Z$である。この傾向は重い核では陽子数が多くなり、それらの間の電気的斥力が重要になってくることから理解される。

7　原子核の励起と電磁波

原子核と電子から構成される原子にはエネルギー最低の基底状態とともに、電子の量子軌道の変化（基底状態からの励起）という形で、定まったエネルギーをもつ、すなわち離散的なエネルギーをもつ励起状態が存在する。電子の量子軌道が変化する際には、離散的なエネルギーに対応した離散的な波長の電磁波（光子）の吸収または放出が伴う。よりエネルギーの高い量子状態に遷移することを励起（excitation)といい、逆にエネルギーの高い状態から低い状態に遷移することを脱励起（de-excitation)という。原子が励起したとしても，永遠にその状態にとどまり続けることはない。励起された原子は，一つまたはそれ以上の脱励起を経て、最終的に基底状態に落ち着いていくのである。

図 2: 核図表 (陽子数と中性子数と安定な原子核と不安定な原子核の分布図）。出典 [12]。黒色の四角は安定な核で、その両側に陽子数過剰な核 (proton-rich nuclei) と中性子数過剰な核 (neutron-rich nuclei) が分布している。それらの上限または下限をしめす曲線はそれぞれ $S_{\mathrm{p}} = 0,\ S_{\mathrm{n}} = 0$ を満たす。



同様に、原子核にも核子（陽子と中性子の総称）の量子軌道の変化や、核子集団の一部または全部によるクラスタ的励起（分子的励起）や集団運動による励起状態が存在する。励起状態間の遷移や励起状態と基底状態との遷移の場合には、光子 (ガンマ線）の放出または吸収を伴う。系外から電磁波などの形でエネルギーが与えられると、離散的なエネルギーを持つ準位に励起される。また脱励起の場合には、離散的なエネルギーに対応した離散的な波長の電磁波（光子）の放出が伴う。このような高エネルギーの電磁波はガンマ線と呼ばれ、放射線崩壊のひとつ、ガンマ崩壊を意味する。原子核が励起したとしても，永遠にその状態にとどまり続けることはない。励起された原子核は，一つまたはそれ以上の脱励起を経て、最終的に基底状態に落ち着いていくのである。

２つの図の比較により、励起状態のエネルギーと状態間のエネルギーは、原子核の場合には原子の場合 (数 eV) に比べて相当に大きい。エネルギーが相当に大きいことの理由は，核子間に働く力 (＝核力）が，電子と原子核間に働く力（＝電気力）に比べて，非常に強いことによる。

図 3: 水素原子のエネルギー準位。出典 [19]。

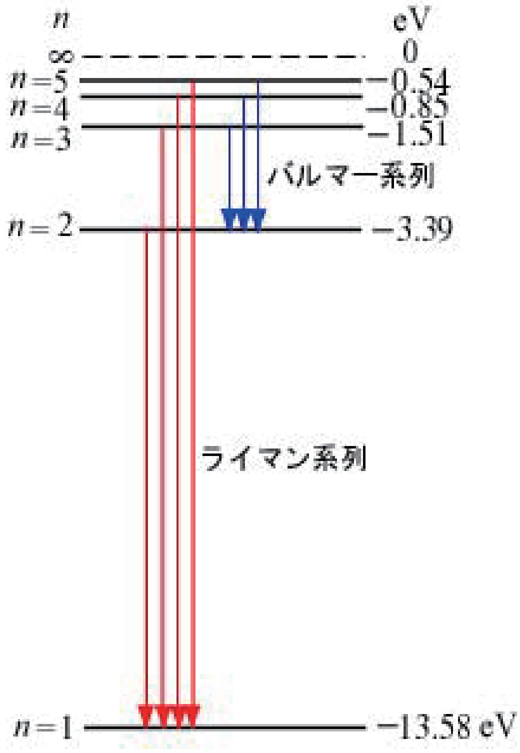
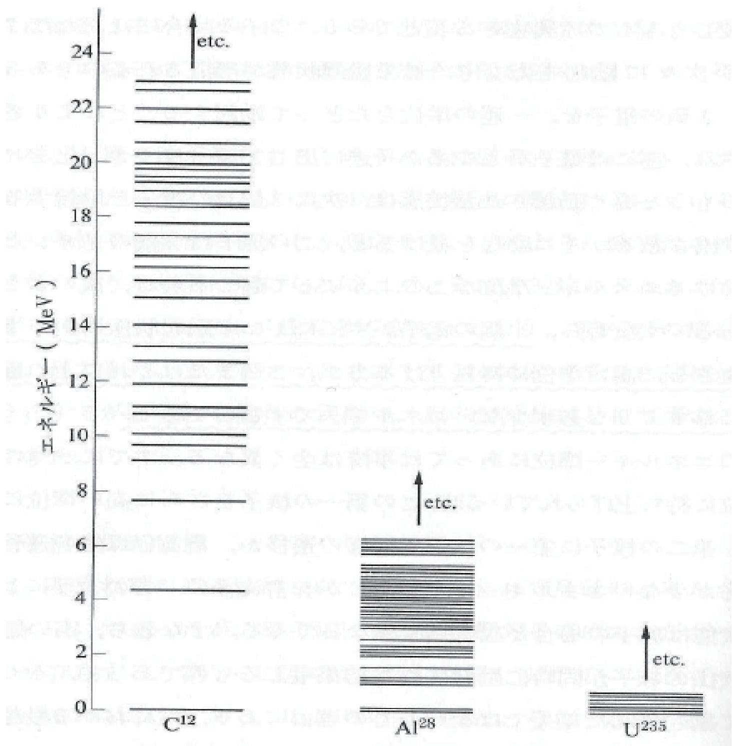


図 4: 原子核の励起エネルギー準位。出典 [10]



A　相対論的力学の要点ー原子核現象への応用を中心としてー

このノートは相対論的力学の要点のうち，主として原子核現象 (質量欠損，結合エネルギー，放射性崩壊，核分裂と核融合を含む核反応) に関係する部分について，できるだけ初等的に理解するために作成する．詳細な解説については適当な書物 [17] やホームページ [18] を参照のこと．筆者が知る限り，相対論的力学の原子核現象への応用についての解説は意外に少ない．

A.1　特殊相対性理論の出発点としての二つの原理

- 光速度一定の原理：ふたつの慣性座標系において，(真空中の) 光速 c の値は等しい．
- 特殊相対性原理：ふたつの慣性座標系において，物理法則は同形である．

A.2　ローレンツ変換

ある粒子 (物体) の空間座標と時間は二つの慣性座標系（K 系と K' 系）で一般には異なる．簡単のために，$x(x')$ 軸向きに，一定の相対速度 v で運動する二つの慣性座標系を考える．考える粒子の二つの慣性座標系から見た座標と時間 (x, y, z, t)，(x', y', z', t') は，単純に同じではなく，次の式で表されるローレンツ変換により相互に結びつけられている．

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{A.1}$$

これらの式を用いると，慣性系（K 系）において，原点から出発した光の速度が c であるという関係式，$x^2+y^2+z^2 = c^2t^2$ が成り立つ場合，別の慣性系（K' 系）において，原点から出発した光の速度が c であるという関係式, すなわち，$x'^2+y'^2+z'^2 = c^2t'^2$ が成り立つことが示せる． 光速度不変の原理から導出されるローレンツ変換が確かに光速度不変の原理を満たすことが分かる．

証明：

$$\begin{aligned}
x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 &= \frac{(x - vt)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2 - c^2\frac{\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}1 \\
&= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left[(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - c^2\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)^2\right] \\
&= \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left[c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

A.3　質量とエネルギーの等価・相互転換性

[静止] 質量[7]m，速度 v の粒子の相対論的エネルギー[8] E は

$$E \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{A.3}$$

と与えられる．ここで，mc^2 を静止エネルギー[9]という．すなわち，特殊相対論においては,「粒子の速度がゼロであっても，静止エネルギーを持つ」と考える．相対論的エネルギー E は，粒子の速度が光速に比べて小さい場合，近似的に

$$\begin{aligned} E &\approx mc^2\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{-1/2} = mc^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\cdots\right] \\ &\approx mc^2+\frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \tag{A.4}$$

と書ける．ここで，実数 $n,\ x(|x|<<1)$ に対する次の近似公式を用いた．

$$(1+x)^n = 1+n\alpha+\cdots \approx 1+nx. \tag{A.5}$$

相対論的運動エネルギー[10]K とその近似

$$K \equiv E-mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \tag{A.6}$$

$$\approx \frac{1}{2}mv^2. \tag{A.7}$$

相対論的質量：

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{A.8}$$

式 (A.8) で定義される相対論的質量は粒子の速度に依存して増大し, 光速に近づくと無限大になる. この事実は実験的に検証されている．

相対論的運動量[11]

$$p \equiv \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{A.9}$$

---

[7]rest mass
[8]relativistic energy
[9]rest energy
[10]relativistic kinetic energy
[11]relativistic linear momentum

相対論的な運動量とエネルギーの関係

$$E^2 = (mc^2)^2 + (cp)^2, \tag{A.10}$$
$$E_\pm \equiv \pm\sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2},\ (\text{複合同順}). \tag{A.11}$$

ここで，特殊相対論においては，式 (A.11) により定義される正負のエネルギー $E_\pm$ が理論的に可能であり，電子の反粒子である陽電子の発見に繋がり，電子陽電子の対発生や対消滅など電子と物質の相互作用で重要な役割を果たす．関係 (A.10) の証明：

$$\begin{aligned}(mc^2)^2 + (cp)^2 &= (mc^2)^2 + \frac{(mcv)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = mc^2\left[mc^2 + \frac{mv^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] \\ &= mc^2\left[mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{mv^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] = \frac{(mc^2)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = E^2.\end{aligned} \tag{A.12}$$

以下，特に断らない限り，E_+ を E と記す．

（解析力学における正準形式の場合と同様に）エネルギーと運動量から速度 v は

$$v = \frac{dE}{dp}. \tag{A.13}$$

と与えられる．

A.4 相対論的エネルギーの保存則

外部と質量、相互作用などやりとりがない系 (孤立系) においては, 粒子または粒子系の相対論的なエネルギーは保存される．系を構成する粒子間にポテンシャル・エネルギーがある場合には相対論的エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和が保存される．ここで注意すべきは，(静止) 質量は必ずしも保存されないということである．同様に，相対論的な運動量も保存される．

実例：質量 m の電子が静止していて，電位差 V の電極間で加速したとき，この電子が運動量 p をもつとすると

$$mc^2 + eV = \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2} \tag{A.14}$$

という関係が成立する．式 (A.14) の非相対論的な近似式は

$$eV \approx \frac{p^2}{2m}. \tag{A.15}$$

と書ける．

A.5 相対論から見た光子の性質

光の量子としての光子[12]は (静止) 質量は持たないので，式 (A.10) より，そのエネルギー E と運動量 p の間には

$$E = cp \tag{A.16}$$

の関係がある．逆に，光子がエネルギー E を持つ場合には

$$p = \frac{E}{c} \tag{A.17}$$

で与えられる運動量をもつことを意味する。

A.6 複合粒子系における相対論的な運動量とエネルギーの保存則

A.6.1 一般論

相対論的エネルギー，静止エネルギーについての上述の議論では，粒子に対して述べているが，それが要素的 (素粒子) であることは条件にしていない．すなわち、以上の議論における粒子は複合粒子であってもよい．このとき、質量 m は総質量に，速度 v は複合粒子全体としての速度とみなせばよい [20]．以下で，種々の現象において相対論的なエネルギー保存則がどのように表現されるか考える.

(a) 複合粒子系の自発分裂:

(a-1) 粒子間に相互作用もなく，それぞれの粒子に励起エネルギーもない場合：
まず，静止質量 M の複合粒子系が質量 m_1，m_2 の 2 つの粒子に自発的に分裂して，それぞれ速度 v_1，v_2 を得たとする.

$$（複合粒子系全体の静止エネルギー）=（構成粒子の相対論的エネルギーの和）\tag{A.18}$$

を数式で表すと

$$\begin{aligned} Mc^2 &= \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \\ &\approx (m_1+m_2)c^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \end{aligned} \tag{A.19}$$

このとき，明らかに構成粒子の質量の和は保存されず，$M \geq m_1 + m_2$ となり，自発分裂に伴い，質量欠損[13] ΔM が生じる.

$$\Delta M \equiv M - (m_1+m_2). \tag{A.20}$$

[12] photon
[13] mass defect

式 (A.20) を式 (A.19) に代入して書きなおすと

$$\Delta Mc^2 \approx \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \tag{A.21}$$

となり，質量欠損に伴う相対論的なエネルギーが 2 つの粒子の運動エネルギーに転化したことが分かる．運動量保存則を近似的に使えば

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m_1 v_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \\ &\approx m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{aligned} \tag{A.22}$$

となり，この結果を式 (A.21) に代入するとそれぞれの粒子のもつ運動エネルギー K_1，K_2 は

$$K_1 \equiv \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\Delta Mc^2, \tag{A.23}$$

$$K_2 \equiv \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\Delta Mc^2 \tag{A.24}$$

と書ける．すなわち，質量欠損に伴う相対論的なエネルギー ΔMc^2 が 2 つの粒子の運動エネルギーに，それぞれの質量の逆比で分配されることになる．

(a-2) 粒子間に相互作用エネルギー（ポテンシャル）u_{12} がある場合:

$$\begin{aligned} Mc^2 &= \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} + u_{ij} \\ &\approx (m_1+m_2)c^2 + \left[\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right] + u_{ij}. \end{aligned} \tag{A.25}$$

(a-3) それぞれの粒子が励起状態になっている場合:
励起エネルギー $E_{ex,i}, (i=1,2)$ をもつ励起状態における静止質量 [22, 23] をそれぞれ $m_{ex,i}, (i=1.2)$ と記すと

$$m_{ex,i} = m_i + \frac{E_{ex,i}}{c^2},\ (i=1,2) \tag{A.26}$$

$$\to m_{ex,i}c^2 = m_i c^2 + E_{ex,i},\ (i=1,2). \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned} Mc^2 &= \frac{m_{ex,1} c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_{ex,2} c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \\ &\approx (m_{ex,1}+m_{ex,2})c^2 + \frac{1}{2}m_{ex,1} v_1^2 + \frac{1}{2}m_{ex,2} v_2^2 \quad \text{(A.28)} \\ &\approx (m_1+m_2)c^2 + \left[\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right] + [E_{ex,1}+E_{ex,2}]. \quad \text{(A.29)} \end{aligned}$$

(b) 複合粒子系における質量欠損と結合エネルギー:
十分遠方に静止している質量 m_1，m_2 の 2 つの粒子が引力的相互作用などで結合して，静止質量 M の複合粒子になったとする．この複合粒子の中の 2 つの粒子を十分遠方に引き離すために加えるべき最低のエネルギー E_B とする．この場合，相対論的なエネルギーの保存則より

$$Mc^2 + E_B = m_1c^2 + m_2c^2 \tag{A.30}$$

が成り立つ．ここで，次の量を定義する．

$$\Delta M \equiv m_1 + m_2 - M, \tag{A.31}$$

$$E_B \equiv \Delta M c^2. \tag{A.32}$$

ΔM を質量欠損，E_B を結合エネルギー[14]と言う．$E_B > 0$ であるから，$\Delta M > 0$ である．

(c) 原子核反応における反応熱（Q 値）:
核反応の前後には，エネルギー･質量，運動量，電荷，質量数，角運動量（量子数），パリティなどが保存される。（弱い相互作用が関与する場合には，パリティが保存されないことが知られているが。）

1. エネルギー･質量の保存とは，ある意味で”拡張されたエネルギー保存則”であり，質量 $\times c^2$，運動エネルギー，励起エネルギーの和が保存されることを意味する．すなわち，それぞれの核子または原子核の運動エネルギーを K_i，励起エネルギーを $E_{ex,i}$，$(i = a, b, A, B)$ とすると

$$\begin{aligned}(M_ac^2 + K_a) + (M_Ac^2 + K_A)& \\ = (M_bc^2 + K_b + E_{ex,b}) &+ (M_Bc^2 + K_B + E_{ex,B})\end{aligned} \tag{A.33}$$

が成り立つ．ここで，通常，反応の前の核子または原子核は基底状態にあるという事実を考慮した．この式 (A.33) を書き直すと

$$\begin{aligned}(K_b + E_{ex,b}) + (K_B + E_{ex,B}) - (K_a + K_A)& \\ = (m_a + M_A)c^2 - (m_b + M_B)c^2&\end{aligned} \tag{A.34}$$

となる．ここで，式 (A.34) 左辺は運動エネルギーと励起エネルギーの和の反応の前後における変化，すなわち，終わりの値から初めの値を引いた量を意味する．

[14]binding energy

反応前の質量エネルギーから反応後の質量エネルギーを差し引いた量を反応の Q 値といい，次のように定義される。

$$Q \equiv (m_a + M_A)c^2 - (m_b + M_B)c^2. \tag{A.35}$$

定義 (A.35）を用いると，式 (A.34) は

$$(K_b + E_{ex,b}) + (K_B + E_{ex,B}) - (K_a + K_A) = Q \tag{A.36}$$

と書き直せる．ここで，式 (A.36) は拡張されたエネルギー保存則を表す関係式であり，右辺の Q は式 (A.35) で定義された物理量であることに注意しよう．

Q 値の物理的な意味をより深く理解するため，結合エネルギーの定義式 $E_B(i) \equiv [Z_i m_{\rm p} + N_i m_{\rm n} - M_i] \times c^2,\ (i = A,\ a,\ b,\ B)$ を用いると

$$Q = [M_A + m_a - M_B - m_b]\, c^2 \tag{A.37}$$

$$= E_B(\mathrm{b}) + E_B(\mathrm{B}) - E_B(\mathrm{A}) - E_B(\mathrm{a}). \tag{A.38}$$

と書ける．すなわち，反応の Q 値の意味は考えている系の結合エネルギーの和の，反応の前後における変化であることが分かる．

Q 値が正値のときには，反応がおこる場合，式 (A.36) の左辺が正値，すなわち，反応によりエネルギーに正味の増加が起こるのでこのとき，反応は発熱反応と呼ばれる．この値が負値のときには，反応を起こすには，エネルギーを加えねばならないので，この反応は吸熱反応と呼ばれる。そして，反応を起こすために必要な最低エネルギーを敷居エネルギー（$E_{\rm threshold}$) とよばれ，次のように与えられる。

$$E_{\rm threshold} = |Q|(1 + \frac{m_a}{M_A}). \tag{A.39}$$

$E_{\rm threshold}$ の値が単純に $|Q|$ に等しくならない理由は，エネルギーの一部が (a+A) 系の重心運動に消費されるためである。

$Q = 0$ の場合は，エネルギーの正味の出入りがなく，弾性散乱と呼ばれる。

2. 古典力学において，重心に相対的な運動量の和が保存される．同様に，核反応の前後でも重心に相対的な運動量の和が保存される．

   簡単のため，反応前の a, A の運動エネルギーがほとんどゼロであり，反応後も励起することがないと仮定すると，式 (A.36 は

$$K_b + K_B = Q \tag{A.40}$$

となる．b, B の速度をそれぞれ $v_b,\ V_B$ と記せば，核反応の後の運動量の和の保存則は

$$0 = m_b v_b + M_B V_B \to V_B = -\frac{m_b}{M_B} v_b \tag{A.41}$$

と書ける．$K_b = m_b v_b^2/2,\ K_B = M_b V_b^2/2$ であることと式 (A.40) と (A.41) を用いれば

$$Q = \left(1 + \frac{m_b}{M_B}\right) K_b = \left(1 + \frac{M_b}{m_B}\right) K_B \tag{A.42}$$

が求まる．式 (A.42) から計算に便利な関係式

$$K_b = \left(\frac{M_B}{M_B + m_b}\right) Q, \tag{A.43}$$

$$K_B = \left(\frac{m_B}{M_B + m_b}\right) Q \tag{A.44}$$

が得られる．式 (A.43) と (A.44) より，反応熱である Q 値は反応後の 2 つの粒子の運動エネルギーとして，それぞれの質量の逆比で分け与えられることが分かる．

A.6.2 陽子と電子の複合系として水素原子

自由な陽子と電子から水素原子という複合粒子が形成される場合の質量欠損を考える。陽子の質量と速度をそれぞれ $,m_p, v_p$ とし、電子の質量と速度をそれぞれ $,m_e, v_e,$ 中性の水素原子の質量 M_H とする。 陽子と電子からなる複合粒子としての水素原子の重心 G から、陽子までの距離を $r_p,$ 電子までの距離を r_e とすると、エネルギー保存則とその近似的表現は

$$\begin{aligned} M_H c^2 &= \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_p}{c}\right)^2}} + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} - k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)} \\ &\approx (m_p + m_e)c^2 + \frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 - k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)} \end{aligned} \tag{A.45}$$

となる。ここで、 k_0 は電気力 (クーロン力) の比例係数で、MKSA 単位系の場合には、真空の誘電率 ε_0 を用いて、 $k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ と表される。ここで、水素原子が形成される場合の質量欠損 ΔM は

$$\begin{aligned} \Delta M &= m_p + m_e - M_H \\ &= -\frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 - k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)} \right] \end{aligned} \tag{A.46}$$

と表される。また、結合エネルギーは

$$\begin{aligned} E_B &= \Delta M c^2 \\ &= -\left[\frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 - k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)} \right] \end{aligned} \tag{A.47}$$

と表される．この結果は質量が欠損して結合エネルギーとなると解釈できる．この結合エネルギーは結局，(基底状態の) 全エネルギー，すなわち，運動エネルギーとポテンシャルの和にマイナス符号をつけたものに等しい．この数式表現をみる限り，マイナスの値をもつように見えるかもしれないが，実はプラスの値をもつことが次のようにしてわかる．陽子と電子は共通の重心 G の周りを円運動すると考えると、運動方程式 (ベクトル関係式) の中心向き成分は，それぞれ

$$m_p \frac{v_p^2}{r_p} = k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)}, \tag{A.48}$$

$$m_e \frac{v_e^2}{r_e} = k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)} \tag{A.49}$$

となる．これらを用いて，$m_p v_p^2, m_e v_e^2$ を消去すれば

$$E_B = k_0 \frac{e^2}{2(r_p + r_e)} > 0 \tag{A.50}$$

となり，結合エネルギー E_B はプラスの値をもつことが分かる．

A.6.3 水素原子と酸素原子の化学反応により水が生成される場合のエネルギーと質量変化

このエネルギーがすべて発熱エネルギー Q に使用されたと近似すると，質量欠損 ΔM として

$$\Delta M c^2 \approx Q \tag{A.51}$$

とみなしてよい．水素分子 1g に対する値 $Q \approx 34000 \times 4.18$ J を代入すると

$$\begin{aligned} \Delta M &\approx \frac{Q}{c^2} \\ &= \frac{34000 \times 4.18 \text{ J}}{(3.0 \times 10^8 \text{m/s})^2} \\ &\approx 1.6 \times 10^{-9} \text{ g} \end{aligned} \tag{A.52}$$

となり，1g に対してｊ十分に高い精度で無視できる．すなわち，化学反応の場合，反応の前後で質量は（近似的に）保存される，

参考文献

[1] G.L. グリーン，P. ゲルテンボルト「中性子の寿命の謎」日経サイエンス，2016 年 6 月号，p．55.

[2] 中島林彦，三島賢二「J-PARC で中性子を探る」日経サイエンス，2016 年 6 月号，p．63.

[3] 野上茂吉郎「原子核」裳華房、1974 年。

[4] 八木浩輔「原子核」朝倉書店、1971 年。

[5] 高田健次郎、池田清美「原子核構造論」朝倉書店、2002 年。および引用された文献。

[6] 谷畑勇夫「宇宙核物理入門」、講談社、ブルーバックス、2002 年。および引用された文献。

[7] 堀内　昶「核子が作る有限量子多体系」岩波書店、2004 年。

[8] 有馬朗人「原子と原子核」、朝倉書店、p.164.

[9] L. Glasstone & A. Sesonske, Nuclear Reactor Engineering, 3rd Ed., John Wiley & Sons Inc.

[10] J. R. ラマーシュ「原子炉の初等理論 (上)」吉岡書店。1995 年。

[11] 成田正邦、小澤保知「原子工学の基礎-ミクロからマクロへのシステム工学」現代工学社、1998 年。

[12] J. Lilley,*Nuclear Physics-Principles and Applications*, John Wiley & and Sons, Ltd, 1997.

[13] 八木浩輔「原子核物理学」朝倉書店。1977 年。p.8, 付録 pp.302-310.

[14] J. M. Irvine,*Nuclear Structure Theory*, Pergamon Press, 1972.

[15] NIST（米国標準技術研究所）、Atomic Weights and Isotopic Compositions for All Elements。`https://physics.nist.gov/cgi-bin/Compositions/stand_alone.pl`

[16] 国立研究開発法人日本原子力研究開発機構（JAEA, Japan Atomic Energy Agency), Nuclear Data Center, Tables of Nuclear Data `https://wwwndc.jaea.go.jp/NuC/`

[17] 中野董夫「相対性理論 (物理入門コース (9))」岩波書店，1984 年.

[18] 前野昌弘「特殊相対論入門」2005 年．http://www.phys.u-ryukyu.ac.jp/~maeno/rel/tokushu.pdf

[19] 故高田健次郎氏 (九州大学名誉教授、元理学部長) 作成のホームページ. http://ne.phys.kyushu-u.ac.jp/seminar/MicroWorld/Part4/P43/Bohr_theory.htm

[20] エリ・ランダウ (著), イェ・エム・リフシッツ「場の古典論―電気力学, 特殊および一般相対性理論 (ランダウ=リフシッツ理論物理学教程)，東京図書，1978 年．特に，2 章 相対論的力学，9 節 エネルギーと運動量.

[21] M.A.Preston,*Physics of the Nucleus*,Addison-Wesley Publishing Company. Chap. 16 Basic Reaction Theory.

[22] 山本賢三・石森富太郎「原子力工学概論 (上)」培風館，1976 年．特に，第 1 章 核エネルギーと放射線, p.8 の脚注.

[23] 加藤静吾　講義「原子核物理学」7．核反応の運動学。 http://kato.html.xdomain.jp/nuclearphys/chapter7/chapter7.html#kinema