

(角運動量の保存)filename=angular-conserv-qa050808.tex

滑らかな水平な台上の1点Oに長さ $r$ の軽い糸の一端を結び、他端に質点(粒子)を取り付けて角速度 $\omega_0$ の等速円運動をさせる。今、点Oより $(2/3)r$ だけ離れた台上の点Aに細い釘を鉛直に突き刺して、その点を中心に質点(粒子)が円運動をするようにすると、円運動の角速度はいくらになるかを次の手順で求めよ。(ただし、質点の質量として $m$ を用いてよい。)

1. 糸がA点に触れる直前の、質点の円周方向の速度 $v_0$ はいくらか。
2. 糸がA点に触れる直前の、O点の周りの質点の角運動量 $\ell_0$ はいくらか。
3. 糸がA点に触れる直前の、A点の周りの質点の角運動量 $\ell$ はいくらか。
4. 糸が点に触れる前と後で、質点の、A点の周りの角運動量は変化するかどうか、理由を述べて答えよ。
5. 糸がA点に触れた直後の質点の角速度 $\omega$ はいくらか。

[解答例]

1. 題意より

$$v_0 = r\omega_0. \quad (1)$$

2. 題意より, 式(1)も代入して

$$\begin{aligned} \ell_0 &= rmv_0 \\ &= mr^2\omega_0 \end{aligned} \quad (2)$$

3. 糸がA点に触れる直前の円周方向の速さ $v_0$ で、半径は $r/3$ であるから

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{r}{3}mv_0 \\ &= \frac{1}{3}mr^2\omega_0 \end{aligned} \quad (3)$$

4. 今、粒子には円周方向の力は働かず、垂直抗力がはたらくが、これは中心力であるから、角運動量は保存される。
5. 角運動量は保存されるので、

$$\ell' = m\left(\frac{r}{3}\right)^2\omega \quad (4)$$

と式(3)の $\ell$ が等しくなるので、

$$\omega = 3\omega_0 \quad (5)$$

となる。