

兎が駐車場を走っている。その駐車場には、不思議なことに、座標軸が描かれている。この兎の位置は時刻 t の関数として以下のように与えられている;

$$x = -0.31t^2 + 7.2t + 28, \quad (1)$$

$$y = 0.22t^2 - 9.1t + 30. \quad (2)$$

t の単位は秒、 x と y の単位はメートルである。

- (a) 時刻 $t = 15\text{s}$ における兎の位置ベクトルを単位ベクトル表記で表しなさい。また、その大きさと角度も求めなさい。
 (b) この兎について、時刻 $t = 15\text{s}$ における速度ベクトル \vec{v} を単位ベクトル表記で求めなさい。また、その大きさと x 軸となす角度も求めなさい。

(解答例)

- (a) 時刻 t における位置ベクトルの定義より

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}. \quad (3)$$

ここで、時刻 $t = 15\text{s}$ における x, y 座標の値を計算する。

$$x(15\text{s}) = (-0.31) \times (15)^2 + 7.2 \times 15 + 28 = 66(\text{m}),$$

$$y(15\text{s}) = (0.22) \times (15)^2 - 9.1 \times 15 + 30 = -57(\text{m}),$$

$$\vec{r}(t) = (66\text{m})\vec{i} + (-57\text{m})\vec{j}. \quad (4)$$

原点からの距離 r と x 軸からの角度

$$r(15\text{s}) = \sqrt{x^2(15\text{s}) + y^2(15\text{s})},$$

$$= \sqrt{(66\text{m})^2 + (-57\text{m})^2} \approx 87\text{m},$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \left(\frac{-57\text{m}}{66\text{m}} \right) \approx -41^\circ = -0.71\text{rad}. \quad (5)$$

(ここで、三角関数の逆関数を逆三角関数という。すなわち、 $x = \sin y$ ならば、 $y = \sin^{-1} x$ と書いて、これを逆正弦関数という。また逆正弦関数を $y = \arcsin x$ (アークサインと読む) と書くこともある。同様に、 $\cos^{-1} x (= \arccos x)$ や、 $\tan^{-1} x (= \arctan x)$ などが定義される。)

- (b) 時刻 t における速度ベクトルの定義より

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} \quad (6)$$

速度の x, y 成分の計算

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -0.62t + 7.2(\text{m/s}), \quad (7)$$

$$v_x(15\text{s}) = -2.1\text{m/s}, \quad (8)$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 0.44t - 9.1(\text{m/s}), \quad (9)$$

$$v_y(15\text{s}) = -2.5\text{m/s}. \quad (10)$$

速度ベクトル $\vec{v} = (-2.1)\text{m/s}\vec{i} + (-2.5)\text{m/s}\vec{j}$ (11)

速度ベクトルの大きさ (= 速さ) v と x 軸となす角度の計算の計算 :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2.1\text{m/s})^2 + (-2.5\text{m/s})^2} \\ &= 3.3\text{m/s}, \\ \theta &\equiv \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \left(\frac{-2.5\text{m/s}}{-2.1\text{m/s}} \right) \\ &= \tan^{-1}(1.19) \cong 50^\circ \end{aligned} \quad (12)$$

上記の式で定義した角度は約 50 度であるが、速度の x, y 成分の符号から、速度ベクトルの向きは第 3 象限にあることがわかる。したがって、速度ベクトルが x 軸となす角は (右回りに考えて) -130 度または (左回りに考えて) 230 度である。