

1次元運動における、一般の重力のポテンシャルについて次の問いに答えよ。

1. 質量 M の物体が原点に、質量 m の物体が位置 $x (> 0)$ にある。位置エネルギー (ポテンシャル) の基準点を $x_0 \rightarrow \infty$ として重力のポテンシャルを求めよ。ただし、重力定数を G とする。
2. このポテンシャルを微分して重力が求まることを確認せよ。
3. 保存力に対しては力学的エネルギーは保存されるから、その値 $E > 0$ の場合、速度の位置依存性、最小値を求め、無限遠方まで存在 (運動) 可能かどうか調べよ。
4. $E < 0$ の場合、距離の上限 (最大値) があるかどうかを調べよ。
5. $E = 0$ の場合、物体 m の速度 (= 脱出速度) を求め、原点からの位置 x を地球半径 $R_e = 6370\text{km}$ とし、重力定数 $G = 6.67259 \times 10^{-11}\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ 、質量 M に地球質量 $M_e = 5.974 \times 10^{24}\text{kg}$ を代入して、地球からの脱出速度を計算せよ。

(解答例)

1. 物体 M から物体 m に働く重力 F は

$$F = -G \frac{mM}{x^2} \quad (1)$$

であるから、重力のポテンシャルは

$$U(x) = - \int_{\infty}^x (-G \frac{mM}{x^2}) dx = -G \frac{mM}{x} \quad (2)$$

となる。

2. このポテンシャルを微分すると

$$-\frac{dU(x)}{dx} = -G \frac{mM}{x^2} \quad (3)$$

大きさと向きまで含めて重力が求まる。

3. 力学的エネルギーは保存されるから

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{x} = E \quad (4)$$

となる。これより、速度の位置依存性、最小値はそれぞれ

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{x}}, \quad (5)$$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (x \rightarrow \infty \text{ の時}) \quad (6)$$

と与えられる。力学的エネルギー $E > 0$ の場合には、明らかに無限遠方でも存在 (運動) 可能である。

4. $E < 0$ の場合にも同様に

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{x}}, \quad (7)$$

$$(8)$$

と与えられるが、根号内は非負でなければならない。したがって

$$\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{x} \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{GmM}{(-E)} \quad (9)$$

となる。すなわち、 $E < 0$ の場合には、その値に応じた距離以内の局所的な運動 (束縛運動) のみが可能である。

5. 題意より

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{x} = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{x}} \quad (10)$$

となり、脱出速度は物体の質量 m には依存しないことに注意する。ここで与えられて値を代入すると

$$v = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} \approx 11.2 \text{ km/s}. \quad (11)$$

6. (備考 1)

一般の重力ポテンシャルと地表付近の重力ポテンシャルの関係。

質量 M_e 、半径 R_e の地球が原点にあり、地表から高さ h のところにある質量 m の物体の位置は $x = R_e + h$, ($R_e \gg h$) である。この場合、重力ポテンシャルは

$$\begin{aligned} U(x) &= -G\frac{mM}{x} = -G\frac{mM}{R_e + h} \\ &= -G\frac{mM}{R_e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{h}{R_e}} = -G\frac{mM}{R_e} \cdot [1 - \frac{h}{R_e} + \dots] \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ここで $GM_e/R_e^2 \equiv g$ とおくと

$$U(x) \approx -mgR_e + mgh \quad (13)$$

となる。ポテンシャルの中の定数項 (mgR_e) には物理的に効果はないので、地表の重力ポテンシャルが一般の重力ポテンシャルの局所的な近似的表現として得られたことになる。

7. (備考 2)

原点からの距離 x を天体の半径 R とおき、脱出速度を光速 c とおくと、光も脱出不可能の天体 (blackhole) の半径と質量の関係 $2GM = c^2R$ が求まる。

8. (備考 3)

$2GM/c^2$ を天体 M のシュバルツシルト (Schwarzschild) 半径という。この半径の中では、天体 M の重力のために光も脱出できない。