

バネの力 (フックの力) について次の問いに答えよ。

1. バネ定数 k のバネの一端を固定し、他端に質量 m のおもりがつけてある。おもりのつりあいの位置からの変位 x が小さい場合、バネの力 (= フックの力) $F = -kx$ であるとして、(バネの弾性による) 位置エネルギー (ポテンシャル) を求めよ。ただし、位置エネルギーの基準点を $x = 0$ に選べ。
2. このポテンシャルを位置座標について微分し、フックの力が求まることを確認せよ。
3. 保存力に対しては、系の力学的エネルギーは保存されるから、その値を $E (> 0)$ として、速度の位置依存性とその最大値を求めよ。
4. 同様に、変位の絶対値の速度依存性、その最大値を求めよ。

(解答例)

1. 題意より

$$U(x) = - \int_0^x (-kx') dx' = \frac{1}{2} kx^2 \quad (1)$$

2. このポテンシャルを微分すると

$$-\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d(\frac{1}{2}kx^2)}{dx} = -kx \quad (2)$$

大きさと向きまで含めてフック (Hooke) の力が求まる。

3. 力学的エネルギーは保存されるから

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (3)$$

となる。これより、速度の位置依存性、最大値は

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2}, \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (4)$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (x = 0 \text{ の時}) \quad (5)$$

と与えられる。

4. 同様に、変位の絶対値の速度依存性、その最大値は

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k} - \frac{v^2}{\omega^2}}, \quad (6)$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad (v = 0 \text{ の時}) \quad (7)$$

と与えられる。

5. (備考)

変位の絶対値の最大値が、与えられる力学的エネルギーの値に依存した有限であることは、バネにつけられた粒子の運動は局所的に束縛された運動であることを意味する。