

運動方程式

—微分方程式としての運動法則—

目次

1. 微分方程式とは何か
2. 微分方程式の一般解、特殊解とそれらの意味
3. 傾き α をもつ直線の集合を表す微分方程式
4. 円の集合を表す微分方程式
5. 楕円の集合を表す微分方程式は？
6. 変数分離形の微分方程式
7. 微分方程式としての運動方程式
8. 力が一定の場合
9. 力が速度の1,2乗に比例する場合
10. フックの力の場合(変位に比例する復元力)

1. 微分方程式とは何か

未知の関数の微分係数を含む方程式

微分方程式の解法=積分すること

1回積分するごとに未定の積分定数が現れる

□

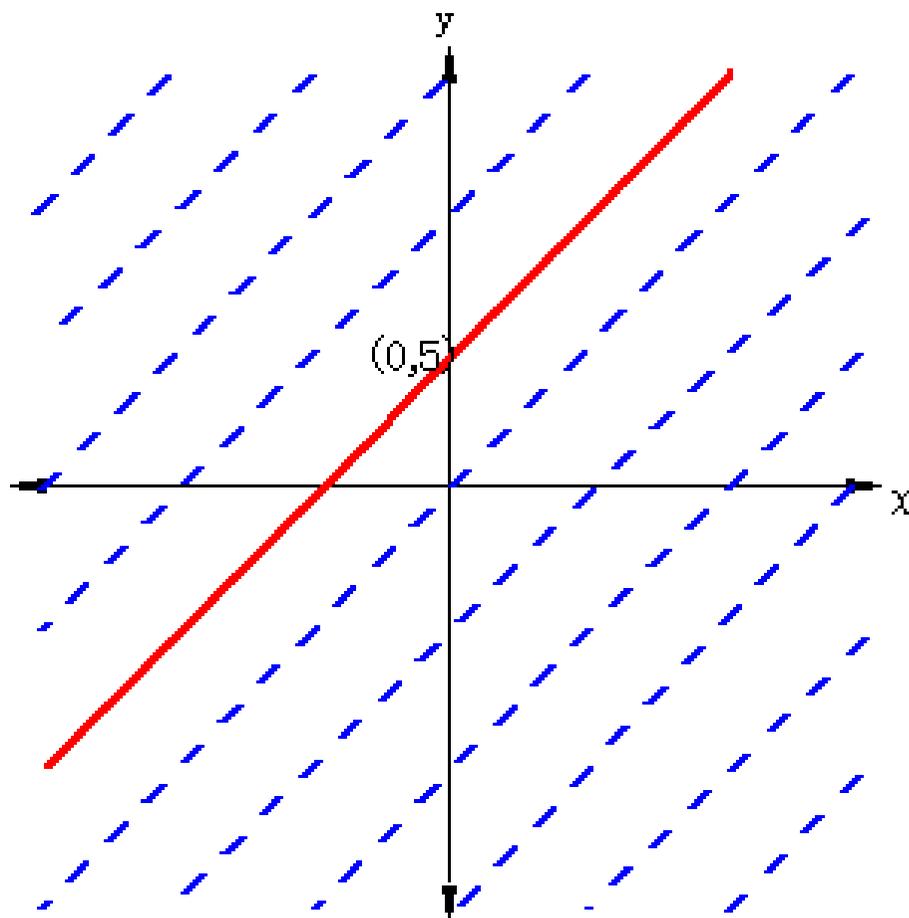
微分方程式=必然性(法則)、可能性の集合



現実化(現象化)

2.

微分方程式の一般解と特殊解 それらの意味



ある可能性の集合全体を特徴づける関係式としての微分方程式

あらゆる点において
傾き1のグラフを決める
微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

一般解

$$y = x + C$$

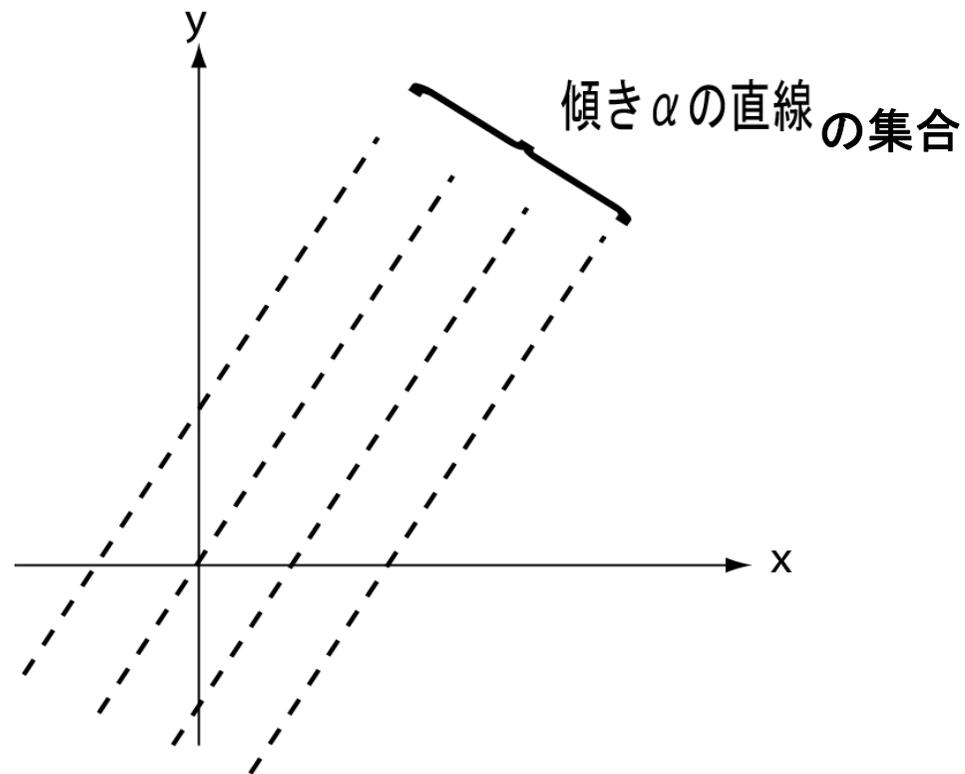
C: 積分定数

点(0,5)を通過するという
境界条件を満たす特殊解

$$y = x + 5$$

3. 傾き α をもつ直線の集合を表す微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \text{ (一定値)} \Leftrightarrow y = \alpha x + c \text{ (} c \text{: 積分定数)}$$



4. 円の集合を表す微分方程式

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r: \text{一定の半径})$$

↓ x で両辺を微分

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

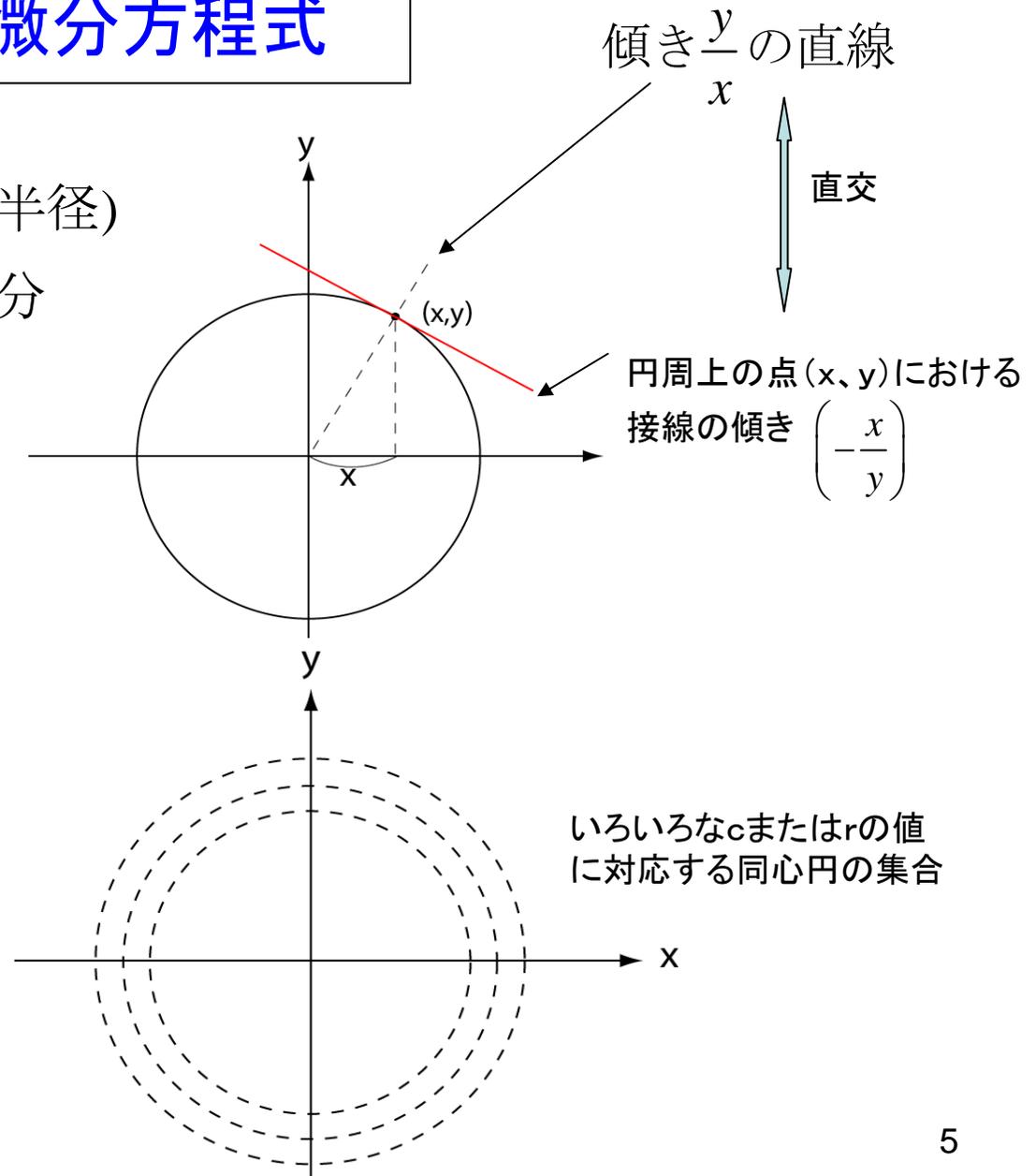
$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\rightarrow ydy = -xdx \rightarrow xdx + ydy = 0$$

$$\rightarrow \int xdx + \int ydy = \text{一定値} \equiv c^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c^2$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{2}c)^2 = r^2$$



5. 楕円の集合を表す微分方程式は？

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \neq b : \text{一定})$$

↓ x で両辺を微分

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \times \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

6. 変数分離形の微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = -kv \quad (v(t): \text{未知関数、} k > 0: \text{一定})$$

$$\rightarrow \frac{dv}{v} = -kdt \rightarrow \int \frac{dv}{v} = (-) \int kdt \quad (\text{積分は和である!})$$

$$\rightarrow \log_e |v| + c_1 = -kt + c_2 \quad (c_1, c_2: \text{積分定数})$$

$$\rightarrow v = \pm e^{c'} \cdot e^{-kt} \rightarrow v = c \cdot e^{-kt} \quad (c' \equiv c_2 - c_1, c \equiv \pm e^{c'})$$

一般解 (general solution)

初期条件: $t=0$ のとき, $v \equiv v_0$ (一定値) とすると



(注意: 初期条件は微分方程式とは独立である)

$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$

公式 $\int \frac{1}{x} dx = \log_e |x| + C$ (C : 積分定数)

特殊解 (specific solution)

(微分方程式の種類により、一般解の中に含まれない解 (特異解) を含む場合)

7.微分方程式としての運動方程式

$$ma(t) = F(x, v; t) \quad (\text{ここでは1次元の場合を考える})$$

$$\Leftrightarrow m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(x, v; t) \quad \text{質量} \times \text{加速度} = \text{外力}$$

1) 外力Fの関数形は問題ごとに与えられるが、時間tの関数としての位置、速度の関数形が未知である

2) 力は、粒子の位置、速度、時間に依存しない一定の場合もあるが、位置や速度、時間に依存して変化する場合もある！

$$m \frac{dv}{dt} = F \leftarrow v = v(t), F = F(x, v; t) \quad \text{at any } (x, t)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \leftarrow x = x(t), F = F(x, dx/dt; t) \quad \text{at any } (x, t)$$

未知の関数としての位置や速度の微分係数を含む方程式
= 微分方程式

8.力が一定の場合

実例：地表付近における重力

一般には、重力は粒子(物体)間の
相対距離に依存して変化する！

$$F = \text{constant value} \equiv F_0$$

$$\rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_0 \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_0}{m}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = \left(\frac{F_0}{m} \right) t + v_0 \quad (v_0 : \text{積分定数})$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{2} \left(\frac{F_0}{m} \right) t^2 + v_0 t + c \quad (c : \text{積分定数})$$

9.力が速度の1,2乗に比例する場合

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k v$$

$$\rightarrow m \frac{dv}{dt} = -k v \quad (v \equiv \frac{dx}{dt})$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = -\gamma v \quad (\gamma \equiv \frac{k}{m})$$

実例: 微粒子がゆっくりと流体中を
移動する場合の粘性抵抗力
(ストークスの[経験的]法則)

変数分離型の微分方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\beta v^2$$

$$\rightarrow m \frac{dv}{dt} = -\beta v^2$$

$$\rightarrow \frac{dv}{dt} = -\delta v^2 \quad (\delta \equiv \frac{\beta}{m})$$

実例: 物体が高速で流体中を
移動する場合の慣性抵抗力
(ニュートンの[経験的]法則)

変数分離型の微分方程式

10.フックの力の場合 (粒子の釣り合いから変位に比例する復元力)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{変数分離型の微分方程式}$$

一般解

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta_0), \quad A, \theta_0 : \text{積分定数}$$

$$\text{or } x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0)$$

解を元の微分方程式に代入すると、満足することがすぐわかる。(必要条件)

逆に、微分方程式の両辺に速度 v をかけて、積分し、平方根をとり、ある

積分公式を用いると、一般解の関数形が直接に得られることも示すことができる！

(十分条件)