

力と運動の法則

made by R. Okamoto, Kyushu Institute of Technology,
(filename=law-of-forcemotion-text08425.tex)

1 運動の第一法則と慣性系

1.1 現実の "物体" と質点概念または (点) 粒子概念

物体とは何か。論理的に可能と思われる物体概念のモデルは、巨視的な連続体、大きさのない点の集合、最小不可分体 (微小な "剛体") の集合であるかのいずれかであろう。

ここでは、その物理的な性質が、質量—後述のように、慣性の大きさ—と位置だけであるような理想的な物体を「質点」(point particle, material point) という。この質点概念は必ずしも物体の大きさが小さいことを意味しない。その運動の自由度が並進だけであり、自転 (回転) を含まないことがポイントである。すなわち、物体の力学的運動の単純さの極限として質点概念を導入する。現実の物体は関心の鋭さ、分解能により十分高い精度を持つ近似で質点とみなせることも少なくない。例えば、地球も太陽系の惑星の力学的運動を考える場合には質点とみなせる。しかし、地球の潮汐現象の理解のためには、地球は有限の大きさをもつ物体で、月と共通の重心の周りの公転も考慮する必要がある。

ちなみに、ニュートンは物体とは何かについて、300年前に相当真剣に考えた結果、上記の物体概念モデルの中で、微小な剛体の集合という考えがもっともらしいとした。しかし、その場合にも剛体の表面の硬さのために、2つの物体の衝突により運動に不連続性が発生し、そのことをどう理解するべき (定量的に記述するか) が自分にはわからないので後世への課題とすると記している。(ニュートン著「光学」の付録部分参照。)

力の作用する点という意味で質点という概念を導入したのは旧ユーゴのボスコビッチであるとされている。

1.2 運動の第一法則

第一法則は次のように表現される。

「質点は正味の外力を受けなければ、その運動状態を維持する。すなわち、静止していた質点は静止を続け、等速度運動 (等速直線運動) していた質点は等速度運動 (等速直線運動) を続ける。」

運動状態の変化のしにくさの度合いを慣性 (inertia) という。第一法則は慣性の法則とも呼ばれる。その理由は、この法則は、以下に述べる第二法則 (狭義の運動法則) の特殊な場合と解釈されるべきではなく、運動の法則の成立する座標系 (慣性系または慣性座標系) を確定することになるからである。

「慣性系とはニュートンの運動の第一法則が成立する系である。」

ニュートン著「プリンキピア (自然哲学の数学的原理)」に記述された思想 [?]

1. 無限等質の時間と空間
2. 物体の運動の容器としての空間 (宇宙の物理学と物体の物理学の分離)

われわれは毎日、慣性の法則を体験していること：

1. 地球の自転による表面速度 ≈ 400 m/s
2. 地球の公転による速度 ≈ 29.6 km/s
3. 銀河系の回転による速度 ≈ 19.2 km/s
4. 宇宙膨張による銀河間離反速度

第一法則によれば、静止している質点と一定速度で運動している質点とは等価、局所的には区別できない。

質点の位置座標と時間についてのガリレイ変換によれば、ある慣性系 S に対して等速度 v で運動する質点を系 S に対して等速度 v で運動する別の慣性系 S' から観測すれば、質点は静止して見える。したがって、質点が静止しているかあるいは等速度運動をしているか否かの相異ははじめに選ぶ慣性系による。この意味で静止している状態と等速度で運動する状態は力学的に等価である。

したがって、特にことわらない限り、ある慣性系で「静止」している観測者を基準として運動の法則を記述する。

2 運動の第二法則とその意味

運動の第二法則 (狭義の運動法則、または運動方程式) は次のように表現される。「質点

に正味の外力が働くと、質点には加速度が生じ、その大きさは力の大きさに比例し、その向きは力の向きと一致する。」

このときの比例係数は質量 (mass) と呼ばれ、質点に固有の値である。

1次元 (x 方向) の場合、速度を v_x 、加速度を a_x 、質量を m 、力を F_x とすれば、数学的には次のように表現される。

$$ma_x = F_x, \left(m \frac{dv_x}{dt} = F_x\right). \quad (1)$$

ここで、加速度、質量と力の概念は次元 (単位) も異なる物理量であり、独立の概念であり、したがって、第二法則は加速度 (と質量) と力の "関係" を規定することに注意する。

加速度も力も向きと大きさを持つベクトル量であるから、それらに対応するベクトル (\mathbf{a}, \mathbf{F}) で表すと運動の第二法則はつぎのように、非常に単純な数学的關係で表現される。

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (2)$$

2.1 参考：運動の第二法則の一般的な表現

ここで運動量 (momentum, linear momentum) p_x, \mathbf{p} は次のように定義される。

$$p_x \equiv mv_x \text{ (1次元の場合)}, \mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} \text{ (3次元の場合)} \quad (3)$$

実はニュートン自身は運動の第二法則については次のような内容のことを述べている：

「運動量の時間変化率と(正味の)力が等しい」と。

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x \text{ (1次元の場合)} \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \text{ (3次元の場合)} \quad (5)$$

これらの表現を書き直すと

$$m \frac{dv_x}{dt} + \frac{dm}{dt} v_x = F_x \text{ (1次元の場合)} \quad (6)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{F}, \text{ (3次元の場合)} \quad (7)$$

左辺第二項のように、質量が変化する物体の運動も記述できる点がポイントであり、ロケットの運動、鎖の持ち上げなども同じ法則で記述できるのである！ もちろん、質量が時間的に変化しないような力学系の場合には、表現(4,4)は表現(2)に帰着する。

この法則の特徴と注意すべき点を述べる。

1. ベクトル法則であり、特定の座標表示(直行直線座標、極座標など)にはよらず、成立する。
2. 特定の座標表示を選択した場合、それぞれの成分ごとに独立に成立する。
3. 任意の時刻で、力の種類、個数によらず成立
4. 位置、速度、加速度は慣性系から測ると考える。

2.2 質量と重さの違いと関連

3 運動の第三法則

1. 接触していてもいなくてもよい
2. 相互に運動していてもいなくても
3. 力の相互作用性

4 力の概念と法則

1. 運動状態を変化させる原因、または質点の緊張状態を変化させる原因としての力
2. 基本的力と誘導される複合力, 巨視的な力、または現象論的な力(有効力というべきかもしれない)

基本的力:重力(万有引力)、電磁力、核力(強い相互作用)、弱い相互作用

3. 接触力と遠達力（場の力）
4. 基本的力とその進化（渾然一体状態から分岐独立へ）

4.1 固体と固体の間の摩擦力と垂直抗力

固体と固体の間の摩擦には滑り摩擦と転がり摩擦がある。滑り摩擦については人間の生活の様々な場面で現れるので、16世紀のレオナルド・ダヴィンチを含めて、古くからよく調べられてきた。この滑り摩擦については、つぎのようなアモントン・クーロンの経験的法則（18世紀）が広い範囲で成り立つことが知られている。

1. 摩擦力は見かけの接触面積には依らない。
2. 摩擦力は接触面における垂直抗力の大きさに比例する。
3. 動摩擦力は最大静止摩擦力よりも小さく、速度に依存しない。

実は、アモントン・クーロンの経験的法則が破れる事例も知られている。3番目の法則は低速度領域では成り立たないことが多いようである。

4.1.1 摩擦力、垂直抗力、張力の微視的な起源について

滑り摩擦力が接触面積に依らないことは意外に思われるかも知れない。しかし、固体表面の凹凸のために、実際に接触している面積（真実接触面積）は見かけの接触面積に比べて非常に小さいことがわかっている。

今日では摩擦力の原因については、固体表面の接触しているところが分子間力で凝着していて、固体間の相対運動を引き起こすにはこの凝着を切らねばならなくて、これに必要な力が摩擦力という説明が主流のようである。

原子は正の電荷を持つ原子核と負の電荷をもつ電子の集団から構成されている。通常状態の原子は原子核と電子は平衡の配置をしているが、外力が加わると、配置は変化するとともに、元に戻ろうとする傾向がある。二つの原子間には異なる原子に属する電子集団間には電気的反発力が、異なる原子の原子核間にも電気的反発力が、異なる原子の電子集団と原子核の間には電気的引力が働く。これらの電気力が重ねあわされた複合的な力が原子間力である。原子間力が重ねあわされたもの（多くの力のベクトル和）が分子間力である。

巨視的な物体は、アボガドロ数程度の莫大な個数の原子（または分子）から構成されている。摩擦力、垂直抗力、張力は巨視的な物体間にはたらく現象論的な力である。

この中で、二つの物体を構成する莫大な個数の原子間に働く力を重ね合わせた有効力のうち、接触面に垂直な力を垂直抗力、接触面に平行な力を摩擦力を考えることができる。

糸などの張力は、ある方向の外力により引き伸ばされた原子集団が元に戻ろうとする力を重ね合わせた有効力である。

以上のような意味で、摩擦力と垂直抗力などは巨視的な物体間の有効力として解釈することもできるであろう。

4.1.2 エネルギー散逸現象の機能的な表現としての動摩擦力

対象系(微視的な系)と環境系(巨視的な外界)の間のエネルギー散逸現象の機能的な表現としての動摩擦力

4.2 重力—その基本的性質と役割—

万有引力(universal attraction)または重力(gravitational force)

4.2.1 基本的性質

1. 質量をもつすべての物体(粒子)の間に働く
2. 距離の逆自乗に反比例する長距離力; 遠達性
3. 引力のみ(反発力はない)
4. 重力の影響をゼロにすることは出来ない:非遮蔽性
5. 質量の積に比例する; 非線型性

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (G = \text{万有引力定数}) \quad (1)$$

4.2.2 重力の役割、影響

1. 宇宙レベルでの秩序の形成と運動に支配的な役割を果たしている。
2. 惑星としての地球
 - (a) 水素(水)分子を重力固内にひきつけ、決して散逸させないだけの引力を生じる質量を地球はもっている。
 - (b) 地球磁場をつくる重力エネルギー
 - (c) 氷河期の原因のひとつとしての地球自転軸の傾き(自転と公転の相互作用)
3. 地球表面付近における流体の対流運動(大気, 海水など)
 - (a) 生物生存に不可欠なエアコンとしての大気などの対流運動
 - (b) 地球流体の成層構造
4. 地球表面付近での物質の凝集機構(凝結, 凝固)
5. 生物
 - (a) 受精卵における胚の形成における重力の方向の利用
 - (b) 体の平衡をとるための重力方向の利用(前庭の耳石器)
 - (c) 筋肉・関節・皮膚の感覚への重力の影響
 - (d) 骨のカルシウム成分の調節
 - (e) 心臓の機能への重力の影響
 - (f) 動物, 植物の成長への影響
 - (g) 人類の直立歩行の代償としての, 痔, 低血圧, 腰痛. 参考:第二の心臓としての足(筋肉の収縮による血液の上昇効果)
6. ミクロな世界電子, 中性子の運動における干渉効果への地球自転の影響

7. 時間の定義における重力の影響「1秒」とは、地球ジオイド面上にある ^{133}Cs 原子の基底状態の2つの超微細構造準位間の遷移に対応する放射が 9,192,631,770 回だけ振動する時間である。(1977年国際度量衡委員会決定)「ジオイド面」とは、地球の重力場の等ポテンシャル面のうち、海洋面で平均海面に一致するものをいう。重力ポテンシャルの低いところほど時間の進み方が遅い。(一般相対論による効果)
8. 閉じた系のエントロピー増大法則における重力の効果はどうか?
9. 他の基本的な力(相互作用)との比較電気力の場合; 電荷には正負の2種類があり、かつそれらの大きさは電気素量の整数倍のみが可能である。点電荷間の力の大きさでは電気力が十分大きい。しかし、通常物質では電氣的に中性であることから、電気力の効果は遮蔽されて、局所的効果となる。例; タンパク質における電気力の局所性。

5 ニュートンの運動法則の適用の手順

何をなすべきか直ちに明らかなのは単純な場合だけである。一個の質量 m の大きさと向きが指定された既知の力の作用を受けているときの問題は次の数学の問題に帰着してしまう:

$$m \frac{dv}{dt} = F[(\text{質量}) \times (\text{加速度}) = (\text{力})] \text{ なる方程式を解け。}$$

この場合は、やさしいかやさしくないかは別として、なすべき作業は明瞭である。しかし、もっと一般に扱うのはいくつかの相互作用しあう物体の系(多体系)である。あるものは、お互いに接し、他のものはレールや平面やケーブルによって束縛されて運動する。そのような場合にはどのようにニュートンの運動方程式を適用すればよいか?

(一般的な手順)

1. 与えられた問題を慣性座標系から考えるか、加速度運動座標系から考えるか決める。
2. 全系を個々の部分に分解せよ。
3. 各部分に対して、その部分に働いているすべての力ベクトルを表す図を描き、その値が既知であろうとなかろうとそれぞれの力を(番号付けるなどして)区別せよ。その際に、ニュートンの第3法則(作用反作用の法則)による大きさが等しく向きが反対になる対の力を確認しておくことが重要である。
4. 力や速度、加速度の成分を表現するのに便利な座標系を選べ。その際、その座標系が(少なくとも近似的に)慣性系であることを確かめること。(座標系の原点を、加速されている物体に置かないこと。)
5. 各物体別々にニュートンの第二法則($ma = F$; 質量 \times 加速度 = 力)を適用する。ひとつの物体に n 個の力 F_1, F_2, \dots, F_n が働くなら、それらの合力 F を求めて、

$$\begin{aligned} ma &= F \\ &= F_1 + F_2 + \dots + F_n \end{aligned} \quad (2)$$

とする。成分で表せば

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x \\ &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} \text{ (} y, z \text{ 成分も同様)} \end{aligned} \quad (3)$$

注意：質量が変化する場合を含む一般の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad (4)$$

となる。

6. ここで直ちに数値を代入することはしない。まず、式の上で未知数を求める。求めた後、数値を代入する。(この方式だと、代数計算や物理の誤りの検算が容易であり、数値計算の苦労も減る。)
7. 数値に単位をつけて、答えの次元が正しいかどうかを調べる。
8. 運動学的束縛 (運動の束縛) の条件を書き下せ。
”運動の束縛”の例
 - (a) 二つの (堅く) 連結されたレールつきの列車は同じ速度を持つ。
 - (b) 滑車の両側にかけた綱の両端につけたおもりは反対向き速度で動く。
 - (c) 振り子のおもりは円周に沿って運動する。
9. 系の各部分に対してニュートンの運動の第二法則を書き下せ。選んだ座標軸に沿って、それぞれの力を成分に分解せよ。各物体に対して、それぞれの座標軸の方向の加速度の質量倍はその方向の力の成分の和に等しい。
10. これを同時に、束縛の条件式を付け加えよ。こうして得られた方程式の組を調べ、未知数の数を数えよ。方程式の数の合計と未知数の合計数が等しいことを確かめよ。
(多くの学生諸君が最もよくやる誤りのひとつは、おそらく力学系の各部分の間に働いている力の大きさを最初から想定しようと試みることであろう。一般にそれは不可能に近い。)

6 媒質中の抵抗力

6.1 速度比例抵抗力 (粘性力)

空気中や水中などの流体中をゆっくり運動する球状の粒子には媒質の粘性に起因する、速度に比例する抵抗力が働く。(ストークスの法則 (Stokes's law)) 粒子の速さを v , 半径 r が粘性率 η の場合の抵抗力の大きさ F は近似的に

$$F = 6\pi\eta rv \quad (1)$$

と表される。(複雑な形状に対しても同様に、 $F = \phi\eta rv$ となり、実験により、 ϕ を決めると)。これをストークスの法則 (Stokes's law) という。この近似的表現式が有効であるのは次式で定義されるレイノルズ数 (Reynold's number) N_R が 1 よりも十分に小さいときである。

$$N_R \equiv \frac{\rho_0 v r}{\eta}. \quad (2)$$

ここで、 ρ_0 は流体の密度である。レイノルズ数 N_R は流体力学における重要な定数のひとつであり、層流から粘性流へ移り変わる目安を表す。

ストークスの法則の例を示すために、粘性率 η 、密度 ρ_0 の流体中を落下する半径 r 、密度 ρ の小球の最大速度、つまり終速度（または終端速度、terminal velocity） v_T を求める。この小球の体積は $V = 4\pi r^3/3$ 、質量は $m = \rho V g$ である。 g は重力の加速度である。アルキメデスの原理より、上向きの浮力は置き換えられた流体の重さ $B = \rho_0 V g$ に等しい。終速度は下向きの重力と上向きの抵抗力と浮力の和がつりあうときの速度と考えると

$$\begin{aligned} m \times 0 &= \left(\frac{4\pi r^3 \rho}{3}\right)g - \left[6\pi r v_T + \left(\frac{4\pi r^3 \rho_0}{3}\right)g\right], \\ \rightarrow v_T &= \frac{2}{9} \frac{gr^2}{\eta} (\rho - \rho_0) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。

例題:

1. 半径が $10\mu\text{m}(= 10^{-5}\text{m})$ 、密度が $2 \times 10^3\text{kg/m}^3$ の球形のちりの粒子が 20°C の空気中での終速度はいくらか。ただし、 20C の空気の密度は 1.22kg/m^3 であり、粘性率 $\eta = 1.81 \times 10^{-5}\text{Pa} \times \text{s}$ ($1\text{ Pa} = 1\text{N/m}^2$) とする。
2. 終速度でのレイノルズ数はいくらか。
3. 粘性抵抗力はいくらか。

(解答)

1. 終速度は

$$\begin{aligned} v_T &= \frac{2}{9} \frac{9.8 \times \text{m} \cdot \text{s}^{-2} (10^{-5}\text{m})^2}{\eta} (2 \times 10^3\text{kg/m}^3 - 1.22\text{kg/m}^3) \\ &= 2.41 \times 10^{-2}\text{m s}^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

2. 終速度でのレイノルズ数は

$$\begin{aligned} N_R &= \frac{1.22\text{kg/m}^3 \times 2.41 \times 10^{-2}\text{m s}^{-1} \times 10^{-5}\text{m}}{1.81 \times 10^{-5}\text{Pa} \times \text{s}} \\ &= 0.0162 \end{aligned} \quad (5)$$

となり、これは1よりも十分に小さいのでストークスの法則が適用できる。

3. 粘性抵抗力は

$$\begin{aligned} F &= 6 \times 3.14 \times 1.81 \times 10^{-5}\text{Pa} \times \text{s} \times 10^{-5}\text{m} \times 2.41 \times 10^{-2}\text{m s}^{-1} \\ &= 8.23 \times 10^{-11}\text{N} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

6.2 速度 2 乘比例抵抗力 (慣性力)

参考文献