

多粒子に外部から働く重力について次の問いに答えよ。

1. この重力の、重心のまわりの力のモーメント (トルク) はゼロ、すなわち重心を支えられた物体は重力により回転し始めることはないことを示せ。
2. この多粒子系に働く重力の、座標原点のまわりのモーメントは、全質量が重心に集中した場合に働く重力の、原点まわりのモーメントに等しいことを示せ。

(解答例)

この粒子系は n 個の粒子から構成されているとする。また、鉛直下向きの単位ベクトルを e_z とする。

1. この系の i 番目の粒子の、座標原点からの質量を m_i , 位置ベクトルを r_i , 重心の位置ベクトルを R , 重力加速度の大きさを g とする。ここで、 i 番目の粒子の、重心からの位置ベクトルは $r_i - R$ であるから、外力 (重力) の重心のまわりのモーメント N' は

$$\begin{aligned} N' &= \sum_{i=1}^n [(r_i - R) \times (m_i g e_z)] = g \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i \right) \times e_z - g \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) R \times e_z \\ &= MgR \times e_z - MgR \times e_z = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、上の式を導くのに $\sum_{i=1}^n m_i r_i = MR$, $\sum_{i=1}^n m_i = M$ という関係を用いた。したがって、重心を支えられた物体は重力により回り始めることはない。

2. この多粒子系に働く重力の座標原点のまわりのモーメント N は、

$$N = \sum_{i=1}^n r_i \times (m_i g e_z) = g \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i \right) \times e_z = gMR \times e_z = R \times (Mg e_z). \quad (2)$$

となる。ここで、 $(Mg e_z)$ は全質量 M に対する重力であるから、題意は示された。