

(剛体のつりあい : filename=rigidbody-balance1-qa080724.tex)

細い剛体棒の一端を水平な床面 (A 点) に接触させ、他端を壁 (B 点) に接触させる。それぞれの点における、この棒の静止摩擦係数を μ_A, μ_B として、この棒が (鉛直面内で) 床に対して角度 θ で立ててあるとして、つりあうための水平となす限界角度 θ_m を、次の手順で求めよ。

1. 床と棒の静止摩擦力を F_{Ax} , 床から棒への垂直抗力を F_{Ay} , 壁と棒の静止摩擦力を F_{By} , 壁から棒への垂直抗力を F_{Bx} , 棒の重心 G にかかる重力を W として、力の作用図を描け。
2. この剛体の、水平および鉛直向きの力のつりあい条件式を記せ。
3. この剛体の重心 G のまわりについて、力のモーメント (またはトルク) のつりあい条件式を記せ。
4. この問題における静止摩擦力の上限式を記せ。
5. 以上の結果を用いて、限界角度 θ_m を求めよ。
6. 静止摩擦係数を $\mu_A = 0.25, \mu_B = 0.35$ として、限界角度 θ_m を計算せよ。

(解答例)

1. 略
2. 題意より、水平方向の力のつりあい条件式は、右向きをプラス向きとすると

$$F_{Bx} - F_{Ax} = 0 \quad (1)$$

となる。同様に、鉛直方向の力のつりあい条件式は、鉛直上向きをプラス向きとすると

$$F_{Ay} + F_{By} - W = 0 \quad (2)$$

となる。

3. 計算上の都合で、この棒の長さを 2ℓ とする。重心 G のまわりの、それぞれの力のモーメントは、左回り回転効果をプラス符号として、

$$0 = F_{Ay}\ell \cos \theta - F_{By}\ell \cos \theta - F_{Bx}\ell \sin \theta - F_{Ax}\ell \sin \theta \quad (3)$$

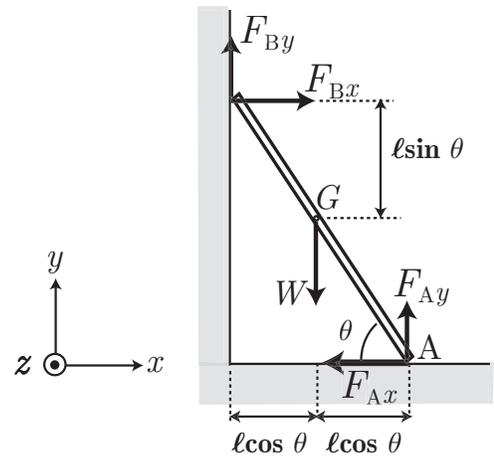
4. 静止摩擦力の上限式は、A 点、B 点において、それぞれ

$$F_{Ax} \leq \mu_A F_{Ay}, \quad (4)$$

$$F_{By} \leq \mu_B F_{Bx} \quad (5)$$

となる。

5. 限界角度 θ_m は、静止摩擦力の上限式において等号が成立する場合である。式



(1),(5) を (3) に代入し、式 (1) と (4) を用いると

$$\begin{aligned}(F_{Ay} - \mu_B F_{Bx}) \cos \theta_m - 2F_{Ax} \sin \theta_m &= 0 \\ \rightarrow (F_{Ay} - \mu_A \mu_B F_{Ay}) \cos \theta_m - 2\mu_A F_{Ay} \sin \theta_m &= 0 \\ \rightarrow \tan \theta_m &= \frac{1 - \mu_A \mu_B}{2\mu_A}.\end{aligned}\tag{6}$$

6. 静止摩擦係数は $\mu_A = 0.25, \mu_B = 0.35$ であるから

$$\begin{aligned}\tan \theta_m &= \frac{1 - 0.25 \times 0.35}{2 \times 0.25} \\ &= 1.825\end{aligned}\tag{7}$$

$$\rightarrow \theta_m = 61.3 \text{ 度 } (= 1.07\text{rad})\tag{8}$$

7. 補足 1 :

この問題の解答例のように、剛体に働く合力がゼロであっても、剛体の重心の並進運動は可能で、重心速度は一定になるがゼロとは限らない。しかし、この問題の場合には、剛体の重心の初速度はゼロであることが想定されていると考えてよい。同様に、剛体に働く外力のモーメントのベクトル和がゼロであっても、剛体の角運動量は一定になるだけで、必ずしも回転運動がないわけではない。しかし、この問題では初めの角運動量はゼロで回転運動はないことが想定されていると考えてよい。

8. 補足 2 :

剛体がつりあいの条件にある場合、どの点にまわりで力のモーメントのつりあい条件を考えても結果は同じであることは証明できる。