

地表から高度 h で地球のまわりの円軌道を一定の速さ v で運動している質量 m の人工衛星を考える。地球と衛星の間の重力は地球の全質量がその中心に集中した場合の重力に近似的に等しいとして以下の問いに答えよ。

1. この人工衛星の速さ v を重力定数 G 、高度 h 、地球半径 R_e および地球質量 M_e で表せ
2. 人工衛星の回転周期 T を G, h, R_e および M_e で表し、周期の 2 乗が円軌道半径の 3 乗に比例するかどうかをしらべよ。
3. 人工衛星の高度 $h = 100$ km の場合、この人工衛星の速さ v を計算せよ。ただし、重力定数 $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ 、地球質量 $M_e = 5.974 \times 10^{24} \text{kg}$ 、地球半径 $R_e = 6400$ km とせよ。
4. 人工衛星の高度 $h = 100$ km の場合の周期 T を計算せよ。

(解答例)

1. この人工衛星の、運動方程式 (ベクトル関係) の地球中心向きの成分より

$$m \left(\frac{v^2}{r} \right) = G \frac{M_e m}{r^2}, \quad r = R_e + h$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e + h}}. \quad (1)$$

2. 周期 T と円周方向の速さの関係より

$$T = \frac{2\pi(R_e + h)}{v}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{(R_e + h)^3}{GM_e}}. \quad (2)$$

従って、周期 T の 2 乗と軌道半径 $(R_e + h)$ の 3 乗は比例する。

3. 式 (1) に与えられた数値を代入して

$$v = \sqrt{\frac{(6.67259 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \times 5.974 \times 10^{24} \text{kg}}{(6400 + 100) \times 10^3 \text{m}}}$$

$$= \sqrt{61.32623 \times 10^6 \text{m/s}} \quad (\leftarrow 1 \text{N} = 1 \text{kg} \cdot \text{m/s}^2)$$

$$= 7.8311 \times 10^3 \text{m/s} (= 7.8311 \text{km/s}) \quad (3)$$

4. 前問の結果を用いて

$$T = \frac{2\pi(R_e + h)}{v}$$

$$= \frac{2 \times 3.14 \times 6500 \times 10^3 \text{km}}{7.8311 \times 10^3 \text{m/s}}$$

$$= 5213 \text{s} (= 86.88 \text{min.}) \quad (4)$$