

回転しているスケーターが腕を縮めると回転が速くなる。簡単のために、腕を伸ばしているスケーターを長さ  $\ell$  の棒の両端に質量  $m$  の質点 ( 粒子 ) が 2 個ついた回転子というモデルで表す。棒と回転軸の質量を無視する。腕を縮めたスケーターは長さが  $\ell/2$  の回転子で表す。腕を縮めるには回転による遠心力に逆らって力を出さないといけない。しかし、この力の方向と回転子の重心  $G$  から見た質点の位置ベクトルの方向は平行であるから、この力による力のモーメントはゼロになり、角運動量は保存される。以下の問いに答えよ。

1. 腕を伸ばしているときの慣性モーメント  $I_0$  と縮めているときの慣性モーメント  $I_1$  を求めよ。
2. 腕を伸ばしているときの角速度  $\omega_0$  として、腕を縮めているときの角速度  $\omega_1$  を求めよ。
3. 腕を伸ばしているときの運動エネルギー  $T_0$  と縮めているときの運動エネルギー  $T_1$  を求め、腕を半分に縮めると運動エネルギーは何倍になるか述べよ。
4. 遠心力に逆らってする仕事  $W$  を計算せよ。
5. 運動エネルギーの変化をもとめ、仕事  $W$  と比較せよ。

(解答例)

1. 慣性モーメントの定義により、粒子が 2 個あることに注意すると、次のように求まる。

$$I_0 = 2 \times m \left( \frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m \ell^2, \quad (1)$$

$$I_1 = 2 \times m \left( \frac{\ell}{4} \right)^2 = \frac{1}{8} m \ell^2. \quad (2)$$

2. 角運動量が保存されるので、初めと終わりの角運動量の大きさを等しいとおくと

$$I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1 \rightarrow \omega_1 = \frac{I_0}{I_1} \omega_0 = 4 \omega_0. \quad (3)$$

3. 題意より

$$T_0 = 2 \times \frac{1}{2} m \left( \frac{\ell}{2} \omega_0 \right)^2 = \frac{1}{4} m \ell^2 \omega_0^2, \quad (4)$$

$$T_1 = 2 \times \frac{1}{2} m \left( \frac{\ell}{4} \omega_1 \right)^2 = \frac{1}{16} m \ell^2 \omega_1^2 = m \ell^2 \omega_0^2. \quad (5)$$

運動エネルギーは 4 倍に増加した。

4. 半径  $r$ 、角速度  $\omega$  のとき、この回転子 ( 2 粒子系 ) にかかる遠心力の大きさは  $2mr\omega^2$  であるから、それに逆らって行われる仕事  $W$  は

$$W = - \int_{\ell/2}^{\ell/4} 2mr\omega^2 dr \quad (6)$$

となる。ここで、半径  $r$ 、角速度  $\omega$  のとき、この回転子 ( 2 粒子系 ) の角運動量が  $2mr^2\omega$  で、角運動量保存則より、初めの値  $2 \times (\ell/2)m \times (\ell/2)\omega_0$  に等しいので、

$$\begin{aligned} 2mr^2\omega &= 2 \times (\ell/2)m \times (\ell/2)\omega_0 \\ \rightarrow \omega &= \left( \frac{\ell^2}{4} \omega_0 \right) \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。この式 (7) を式 (6) に代入すると

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\ell/2}^{\ell/4} 2m \left( \frac{\ell^2 \omega_0}{4} \right)^2 \frac{1}{r^3} dr = \frac{m \ell^4 \omega_0^2}{16} \left[ \frac{1}{r^2} \right]_{\ell/2}^{\ell/4} \\ &= \frac{3}{4} m \ell^2 \omega_0^2 \end{aligned} \quad (8)$$

という結果が得られる。

5. 一方、式 (4) と (5) より、運動エネルギーの差は

$$T_1 - T_0 = \frac{3}{4} m \ell^2 \omega_0^2 \quad (9)$$

となる。このように、式 (8) と (9) を比較すると、遠心力に逆らって、回転子 (2 粒子系) になされる仕事と回転子 (2 粒子系) の運動エネルギーの変化が等しい。(なされた仕事と運動エネルギーの変化が等しいという仕事エネルギー定理の実例である。)