

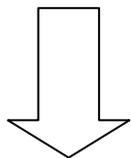
減衰振動、強制振動

目次

1. (フックの力による)単振動＋現実的効果
2. (フックの力＋速度比例抵抗)の下の振動
3. (フックの力＋周期的に変化する外力)の下の振動
4. (フックの力＋速度比例抵抗＋周期的に変化する外力)の下の振動

1. 理想化された単振動から現実的振動へ

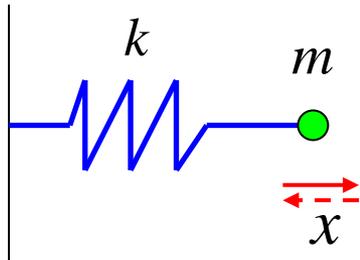
単振動：無限の空間的領域内、
無限の時間持続し、減衰しない。
単純な挙動。



現実的効果：抵抗力、周期的外力

現実の振動的運動：有限の空間的領域内、
有限の時間だけ持続、
最終的には減衰し、消滅する。
複雑な挙動。

单振動



速度比例抵抗力

減衰振動

周
期
的
外
力

周
期
的
外
力

強制振動(共振)

速度比例抵抗力

減衰する強制振動

2. (フックの力 + 速度比例抵抗力) の下の振動: 減衰抵抗

質量 m の物体の、つりあい位置からの変位を x とすると、
任意の時刻 t において

フックの力 (k : バネ定数)

速度に比例する抵抗力

(2γ は単位質量あたりの
抵抗力の比例係数)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + 2\gamma \left(\frac{dx}{dt} \right) + \omega^2 x = 0 \quad [\text{同次微分方程式}] \quad \omega \equiv \sqrt{k/m} \quad (1)$$

時刻 t における変位 $x(t)$ の値が未知:

時間 t についての2階の微分方程式

解法：解の候補として $x(t)=y(t) e^{-\gamma t}$ とにおいて、
 $y(t)$ を求める。

元の微分方程式(1)を計算しやすいように書き直す

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) - \omega^2 x + 2\gamma \left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (\omega \equiv \sqrt{k/m}) \quad (2)$$

関数 x を t で微分

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} e^{-\gamma t} - \gamma y e^{-\gamma t}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} e^{-\gamma t} - 2\gamma y \frac{dy}{dt} e^{-\gamma t} + \gamma^2 y e^{-\gamma t}$$

(2)式に代入して、 y を決める方程式を得る：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\omega^2 - \gamma^2) y = 0 \quad (3)$$

しかし、括弧内の符号(ω と γ の大小関係)が分からないとこれ以上解けない！

固有振動数と抵抗の強さを比較した場合ごとの一般解

(a) $\omega > \gamma$ (弱抵抗)の場合 **減衰振動**

$$x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cos(\Omega t + \theta_0) \quad \text{振幅 } Ae^{-\gamma t}: \text{時間とともに減衰}$$

$$\text{周期 } T = \frac{2\pi}{\Omega} \left(> \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

$$(\Omega \equiv \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} < \omega, A, \theta_0: \text{積分定数})$$

(b) $\omega < \gamma$ (強い抵抗)の場合 : 過減衰

振動しない(過減衰)

$$x(t) = Ae^{-(\gamma-p)t} + Be^{-(\gamma+p)t}$$

$$(p \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < \gamma, A, B: \text{積分定数})$$

(c) $\omega = \gamma$ の場合 : 臨界減衰

$$x(t) = (At + B)e^{-\gamma t}$$

減衰振動、臨界減衰の実例

衝撃吸収装置付のドア：

ドアを開けて初速度ゼロでそっと手を離したとき、
ドアが音を立てることなく閉じるようになっている。

3. (フックの力+周期的に変動する外力)の下の振動: 強制振動と共振

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + mf_0 \cos pt$$

単振動(自由振動)

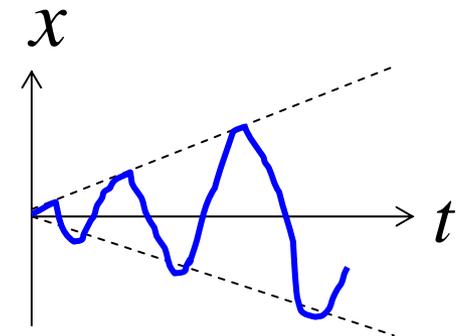
強制振動

$$x = A \cos(\omega t + \theta_0) + \left(\frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \right) \cos pt$$

$$x = \lim_{p \rightarrow \omega} \left(\frac{f_0}{\omega + p} \right) \frac{\sin\left(\frac{\omega - p}{2} t\right)}{\left(\frac{\omega - p}{2} t\right)} \cdot t \cdot \sin\left(\frac{\omega + p}{2} t\right)$$

$$= \left(\frac{f_0}{2\omega} \right) t \cdot \sin(\omega t)$$

共振(共鳴、Resonance)

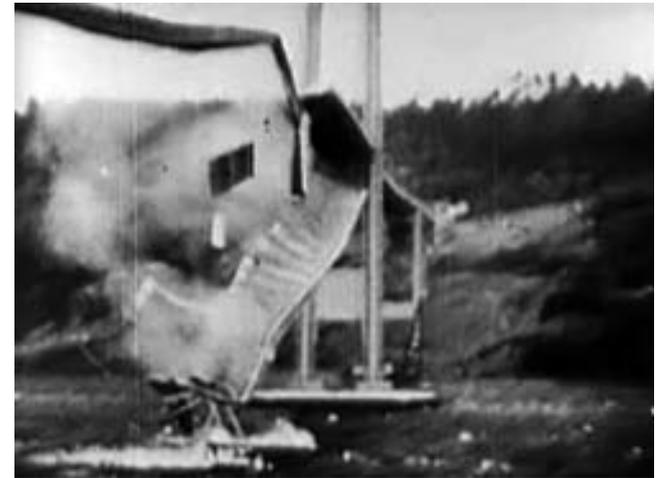
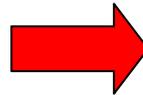


共振(共鳴)の実例

1.遊具の「ブランコ」の、動きの調子に合わせて力を加えると次第に揺れが大きくなる

2.架橋後すぐに風の影響で落橋したタコマナローズ橋

アメリカ合衆国、ワシントン州のピューージェット湾にある海峡、タコマナローズ (Tacoma Narrows) に架かる吊り橋。1940年7月1日に開通。全長1,600m、吊径間853m、幅11.9m。太平洋側有数の港湾都市タコマ市と、アメリカ海軍有数の海軍工廠(造船所)があるブレマートン市などの位置するキトサップ半島地区を結ぶ目的で建設された。当時の最新理論に基づいて設計されており、架橋当時は世界で第3位の長さだった。



参考：強制振動における振幅と位相のずれの 外力振動数依存性

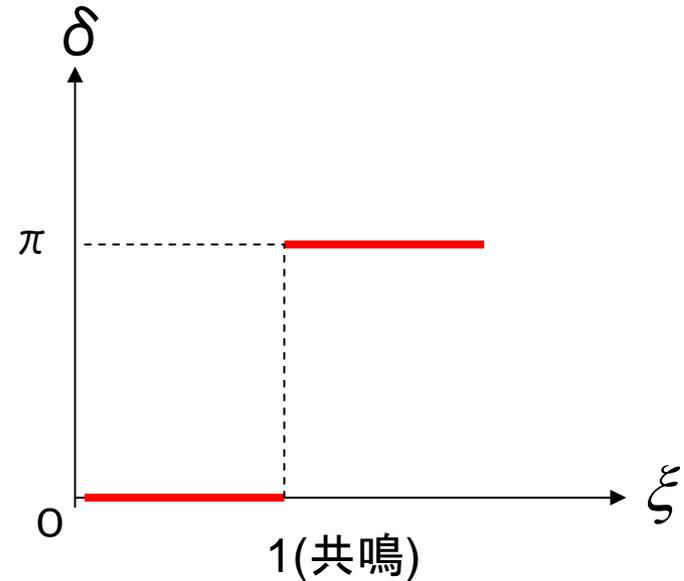
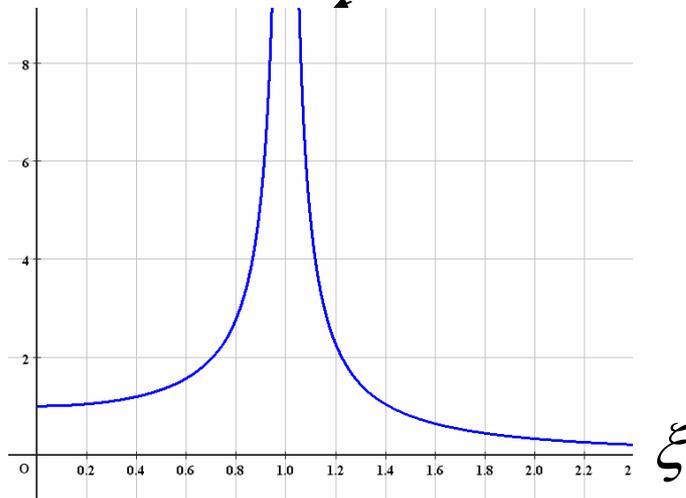
$$x_1 = \alpha \cos(pt - \delta) = \alpha(\cos pt \cdot \cos \delta + \sin pt \cdot \sin \delta)$$

$$\alpha = \left| \frac{f_0}{(\omega^2 - p^2)} \right| > 0; \quad \alpha = \alpha(p)$$

$$\alpha_0 \equiv \alpha(p = \omega) = f_0 / \omega^2 \quad \xi \equiv p / \omega$$

現実には抵抗力など働き、
発散は抑制される

$\alpha(p)/\alpha_0$ 発散する！



4. 参考: (フックの力 + 速度比例抵抗力 + 周期的に変化する外力) の下の振動

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma \frac{dx}{dt} + mf_0 \cos(pt)$$

$$\rightarrow \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + 2\gamma \left(\frac{dx}{dt} \right) + \omega^2 x = f_0 \cos(pt)$$

一般解

$$x \equiv x_1 + x_2,$$

$$x_1 \equiv A e^{-\gamma t} \cos(\Omega t + \theta_0), \quad \text{減衰振動}$$

$$x_2 \equiv \alpha \cos(pt - \delta) \quad \text{強制振動}$$

参考: 速度比例抵抗がある場合の、 強制振動の振幅と位相の外力振動数への依存性

位相(という情報)は、光学、力学、波動だけではなく、量子力学における干渉性など物理学の諸分野においても重要な役割を果たす。また、ある種の魚は敵からの回避、餌の捕獲において位相情報を利用していることも知られている。「外部からの刺激」に対する「系の応答」についての情報

$$\alpha = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + (2\gamma p)^2}}; \quad \alpha = \alpha(p)$$

$$\tan \delta = \frac{2\gamma p}{(\omega^2 - p^2)}; \quad \delta = \delta(p)$$

最大振幅 $\alpha_0 \equiv \alpha(p=0)$

$$= \frac{f_0}{\omega^2}$$

強制振動の振幅増幅率(感受率)と位相(のずれ)

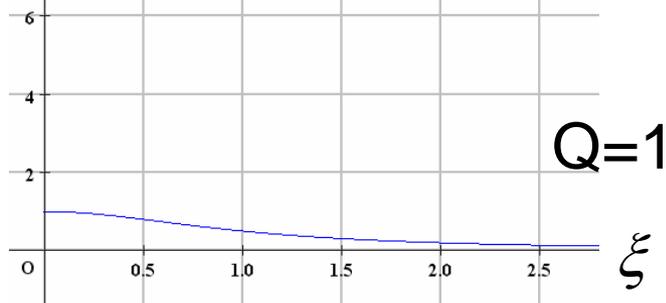
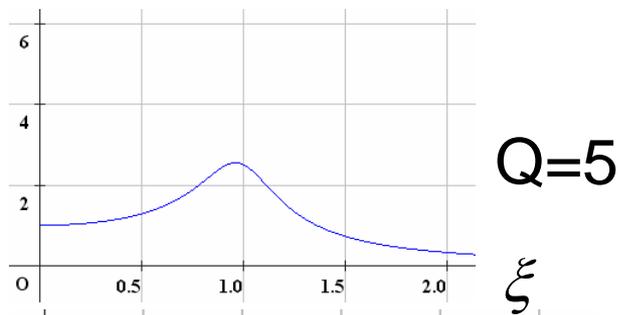
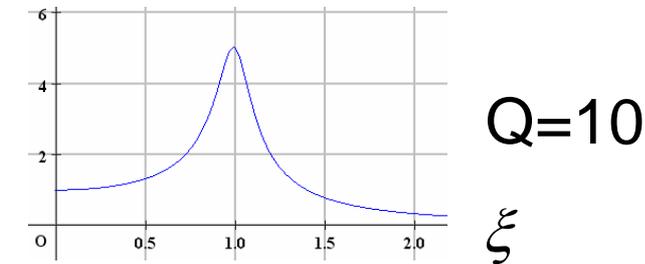
$$\frac{\alpha(p)}{\alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)^2 + \xi^2/Q^2}}; \quad \xi \equiv \frac{p}{\omega}, \quad Q \equiv \frac{\omega}{2\gamma}$$

$$\tan \delta = \frac{\xi/Q}{1-\xi^2}$$

抵抗力の相対的弱さ
共振の鋭さ

固有角振動数で換算された
外力の角振動数

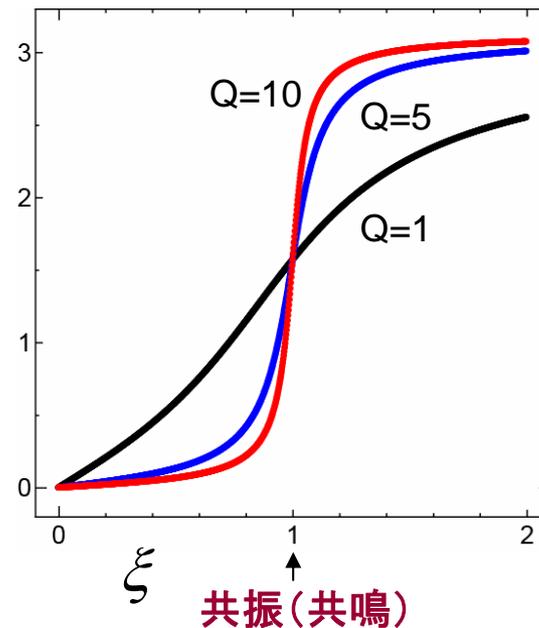
$\frac{\alpha(p)}{\alpha_0}$ 振幅増幅率(感受率)



↑ 共振(共鳴)

位相のずれの外力振動数依存性

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{\xi/Q}{1-\xi^2} \right)$$



注意: 逆tan関数の主値は通常との定義とは異なることに注意。
(HP別紙、逆三角関数@物理のための数学を参照)