RC-circuit-2-qa 140525.pdf

抵抗とコンデンサーからなる RC 回路がある。最初、コンデンサーの両極に $\pm Q_0$ の電荷が蓄えられていたする。その後、スイッチ S を閉じて、放電させる。

1. 任意の時刻 t におけるコンデンサーの両極の電荷 $\pm Q(t)$ と回路を流れる電流の強さ $I(t)$ を求め、t を横軸にして、グラフに描け。
2. 完全に放電するまでの間に、抵抗で発生するジュール熱を計算し、この値が最初コンデンサーに蓄えられていた静電エネルギーに等しいことを示せ。

(解答例)

1. コンデンサーの電位 $V(t)$ と電荷 $Q(t)$ は $V(t) = Q(t)/C$ と表されることと、キルヒホッフの法則により、

$$-RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0. \tag{1}$$

一方、放電の場合、電流と電荷の関係は

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} \tag{2}$$

である。従って

$$\begin{aligned}
& R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0 \to \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}dt \\
& \int \frac{dQ}{Q} = -\int \frac{1}{RC}dt \to Q = \pm \mathrm{e}^{C'}\mathrm{e}^{-t/RC} = C''\mathrm{e}^{-t/RC},\ (\pm \mathrm{e}^{C'} \equiv C'') \\
\to \quad & Q(t) = Q_0\ \mathrm{e}^{-t/RC}, \\
& I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{Q_0}{RC}\right)\mathrm{e}^{-t/RC}
\end{aligned} \tag{3}$$

が得られる。

2. 微小時間 dt の間のっジュール熱 dH は $I^2(t)Rdt$ であるから、全体では

$$\begin{aligned}
H &= \int dH \\
&= \int_0^\infty I^2(t)Rdt = \left(\frac{Q_0^2}{C^2R}\right)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/RC}dt \\
&= \frac{Q_0^2}{2C}
\end{aligned} \tag{4}$$

となり、これは電気容量 C、電荷 Q_0 をもつコンデンサーのもつ静電エネルギーの値に等しい。