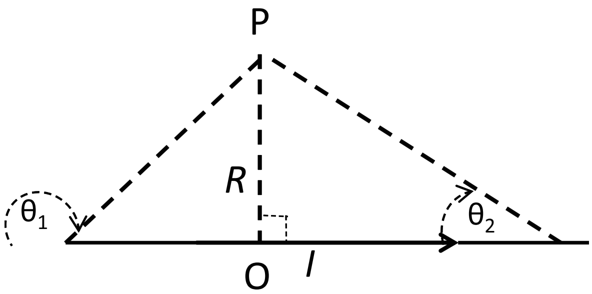
(ビオ・サバールの法則の適用:有限の直線電流のつくる磁場)

filename=biotsavart-direct-finite-current-qa140707B.tex

図のように，有限の長さの直線状の導線に強さ I の電流が流れている．電流 I の



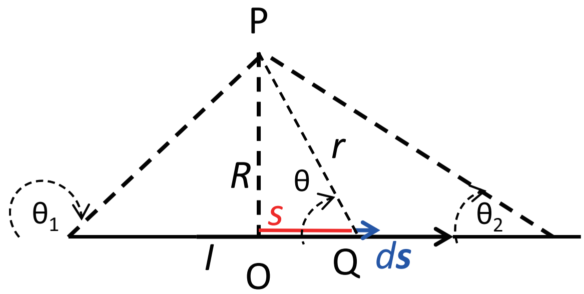
向きから角度 θ_1, θ_2 で眺めるような 2 点 をそれぞれ始点と終点とする直線状の電流から距離 R の点 P における磁場 $\boldsymbol{B}$ を求めよ. ただし，ビオ・サバールの法則より，原点 O から座標 s だけ離れた線要素ベクトル $d\boldsymbol{s}$ が点 P に作る微小磁場 $d\boldsymbol{B}$ は

$$d\boldsymbol{B} \quad = \quad \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right) \frac{d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1}$$

である．この微小磁場 $d\boldsymbol{B}$ の向きは $d\boldsymbol{s}$ から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の向きに右ねじを回したときに右ねじの進む向きである．ここで，真空の透磁率を μ_0 する．

(解答例)

図のように，導線から距離 R の点 P から電流に垂線を下ろした交点を (積分の）原点 O とする．まず，原点 O から座標 s だけ離れた線要素ベクトル $d\boldsymbol{s}$ が点 P に作



る微小磁場 $d\boldsymbol{B}$ はの大きさ dB は

$$dB \quad = \quad \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right) \frac{ds \sin(\pi - \theta)}{r^2} = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right) \frac{\sin\theta}{r^2} ds \tag{2}$$

と書ける．図より

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} \quad &= \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\ \rightarrow \frac{\sin\theta}{r^2} ds \quad &= \quad \frac{\sin^3\theta}{R^2} ds. \end{aligned} \tag{3}$$

さらに，$R = s\tan\theta$, $s = R\cos\theta/\sin\theta$ であることを用いて，積分変数を s から θ へ変換する.

$$\begin{aligned} ds &\equiv \left(\frac{ds}{d\theta}\right) d\theta = R\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) d\theta = R\frac{-\sin\theta\sin\theta - \cos\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta \\ &= -\frac{R}{\sin^2\theta} d\theta \qquad (4) \\ \to \frac{\sin\theta}{r^2} ds &= -\frac{\sin\theta}{R} d\theta, \qquad (5) \\ & \theta_1 \le \theta \le \theta_2. \qquad (6) \end{aligned}$$

よって，以上の結果を用いて積分を実行すると

$$\begin{aligned} B(R) &= \int dB \\ &= \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-1)\sin\theta d\theta = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\right) [\cos\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \\ \to B(R) &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{I}{R} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \qquad (7) \end{aligned}$$

となる．磁場 $\boldsymbol{B}$ の向きは，今の図の場合，紙面の裏から表の向き である.

備考：$\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$ の場合，無限に長い直線状の電流に相当し，その結果は $B(r) = (\mu_0 I/2\pi R)$ となり，最初から無限に長いとして計算した結果に一致する.