(ビオ・サバールの法則の適用:無限直線電流のつくる磁場)

filename=biotsavart-direct-infinite-current-qa140707A.tex

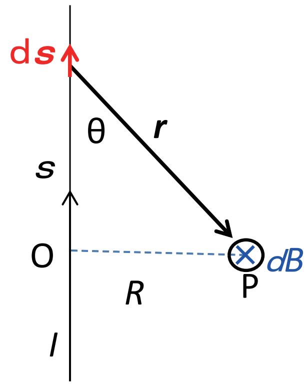
無限に長い（または十分長い）直線状の導線に強さ I の電流が流れている．この電流が導線から距離 R のところに作る磁場の大きさと向きを求めよ．ただし，原点 O から座標 s だけ離れた線要素ベクトル $d\boldsymbol{s}$ が点 P に作る微小磁場 $d\boldsymbol{B}$ はビオ・サバールの法則より

$$d\boldsymbol{B} = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right)\frac{d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1}$$

である．真空の透磁率を μ_0 する．この微小磁場 $d\boldsymbol{B}$ の向きは $d\boldsymbol{s}$ から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の向きに右ねじを回したときに右ねじの進む向きである．

(解答例)

図のように，導線から距離 R の点 P から電流に垂線を下ろした交点を (積分の）原点 O とする．まず，この微小磁場 $d\boldsymbol{B}$ の向きは $d\boldsymbol{s}$ から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の向きに右ねじを回したときに右ねじの進む向きである．図には $\otimes$ と記す．微小磁場の大き



さ dB は

$$dB = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right)\frac{ds\sin(\pi-\theta)}{r^2} = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right)\frac{\sin\theta}{r^2}ds \tag{2}$$

と書ける．次に，微小磁場の大きさを導線のすべての部分からの寄与について積分する．

$$B(R) = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{r^2}ds \tag{3}$$

定積分を実行するために，次のように被積分関数を書き直す．図より

$$r = \sqrt{R^2+s^2},\quad \frac{R}{r} = \sin\theta \tag{4}$$

$$\rightarrow \frac{\sin\theta}{r^2}ds = \frac{R}{r^3}ds = \frac{R}{(R^2+s^2)^{3/2}}ds. \tag{5}$$

ここで，積分を書き直す.

$$B(R) \quad = \quad \left(\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{(R^2+s^2)^{3/2}} = \left(\frac{\mu_0 IR}{2\pi}\right)\int_{0}^{+\infty}\frac{ds}{(R^2+s^2)^{3/2}}. \qquad (6)$$

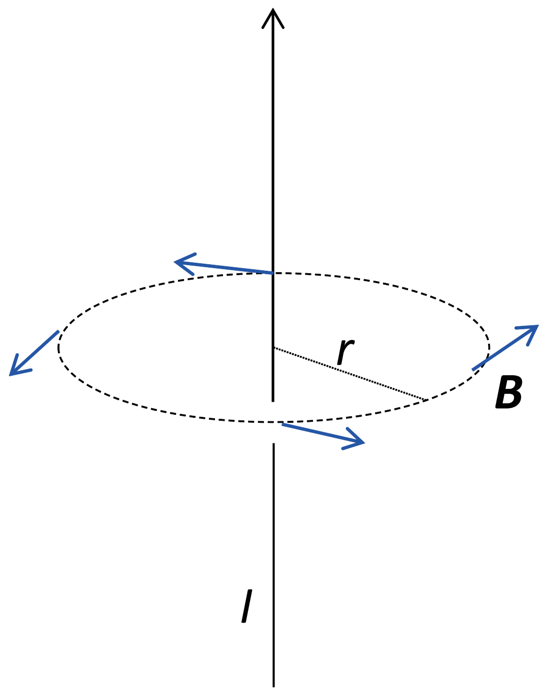
(最後の式変形は被積分関数が偶関数であることを用いた.) さらに，$R/s = \tan\theta$, $s = R\cos\theta/\sin\theta$ であることを使って，積分変数を変換する

$$\begin{aligned}
ds &= \left(\frac{ds}{d\theta}\right)d\theta = R\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta = R\frac{-\sin\theta\sin\theta-\cos\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta \\
&= -R\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta, \\
R^2+s^2 &= R^2+R^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{R^2}{\sin^2\theta},\ \ \frac{ds}{(R^2+s^2)^{3/2}} = -\frac{\sin\theta}{R^2}d\theta, \\
&\quad 0 \le s \le \infty \rightleftharpoons \frac{\pi}{2} \ge \theta \ge 0. \qquad (7)
\end{aligned}$$

よって，式（7）の結果を式（6）に代入して積分を実行すると

$$\begin{aligned}
B(R) &= \left(\frac{\mu_0 IR}{2\pi R}\right)\int_{\pi/2}^{0}(-1)\sin\theta d\theta = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right)\left[\cos\theta\right]_{\theta=\pi/2}^{\theta=0} \\
\to B(R) &= \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)\frac{I}{R} \qquad (8)
\end{aligned}$$

となる．合成された磁場 $\boldsymbol{B}$ の向きを図示すると次のようになる.



(備考：エルステッドが最初に実験的に発見した関係式がビオ・サバール法則により理論的に導出されたことになる.)