(サイクロトロン運動 1 )cycrotron-motion1-qa140726A.tex

一様な磁界（磁場）$\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ の中における荷電粒子（質量 $m$, 電荷 $q$）の運動を次の手順で求めよ。ただし、はじめの時刻の位置は原点 (0,0,0) であるとする。(運動方程式は時間について, 2 階の微分方程式であるから、3 次元空間における運動の場合、初期条件は 6 つ必要である。速度についての残り 3 つの初期条件は小問において与える。)

1. この荷電粒子の任意時刻における速度ベクトルを $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$ として，ニュートンの運動方程式の $x,y,z$ 成分を記せ。
2. 時刻 $t$ における、荷電粒子の $z$ 座標を求めよ。ただし、はじめの時刻における $z$ 方向の初速度を $v_{z0}$ とする。
3. $xy$ 面における運動方程式を解いて、任意時刻 $t$ における、荷電粒子の速度の $x,y$ 成分 $v_x(t),v_y(t)$ を求めよ。ただし、初めの時刻における速度ベクトルの $x,y$ 軸成分をそれぞれ $v_x(0)=v_0,v_y(0)=0$ とし、$qB/m\equiv\omega$ で定義される, 一定角速度 $\omega$ を用いてよい。
4. 時刻 $t$ における、荷電粒子の $x,y$ 座標を求めよ。
5. 以上の結果をまとめると、荷電粒子はどのような運動をするか述べよ。

(解答例)

1. 任意のベクトル $\boldsymbol{C}=(C_x,C_y,C_z),\boldsymbol{D}=(D_x,D_y,D_z)$ に対して，それらの外積 (ベクトル積）は $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}=(C_yD_z-C_zD_y,C_zD_x-C_xD_z,C_xD_y-C_yD_z)$ である.

   この荷電粒子に対するローレンツ力は $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=(qv_yB,-qv_xB)$ なので、運動方程式 $md\boldsymbol{v}/dt=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ を $x,y,z$ 成分に分けて記すと

   $$m\frac{dv_x}{dt}= \ qv_yB,\ m\frac{dv_y}{dt}=-qv_xB,\ m\frac{dv_z}{dt}=0 \tag{1}$$

   となる。

2. 前問の最後の式と初期条件より

   $$v_z=\mathrm{constant}=v_{z0} \tag{2}$$

   となり、$z$ 軸方向には等速直線運動を行う。さらに, 時間 $t$ について積分し、初期条件により積分定数を決めると

   $$z=v_{z0}t+C\rightarrow 0=C\rightarrow z(t)=v_{z0}t \tag{3}$$

   となる。

3. 式 (1) の第 1 式、第 2 式を用いて

$$
\begin{aligned}
& v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} = 0 \ \to v_x^2 + v_y^2 = \text{constant} = v_0^2 \\
\to \quad & v_x(t) = v_0 \cos\theta,\ v_y(t) = v_0 \sin\theta \ (\theta = \theta(t))) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

が得られる。さらに、式（4）を式 (1) の第 1 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
-mv_0 \sin\theta \frac{d\theta}{dt} &= qv_0 B \sin\theta \to \ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{qB}{m} \equiv -\omega \\
\to \ \theta &= -\omega t + C \ (C : \text{任意定数}). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

したがって、速度の $x, y$ 成分は次のように書ける。

$$
v_x(t) = v_0 \cos(-\omega t + C),\ v_y(t) = v_0 \sin(-\omega t + C). \qquad (6)
$$

ここで、$v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0$ を用いると

$$
\begin{aligned}
v_0 &= v_0 \cos(C),\ 0 = v_0 \sin(C) \to C = 0 \\
\to v_x(t) &= v_0 \cos(\omega t),\ v_y(t) = -v_0 \sin(\omega t) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

4. 式 (6) を時間について積分すると, 任意定数 $C_1, C_2$ を用いて

$$
x(t) = (\frac{v_0}{\omega}) \sin(\omega t) + C_1,\ y(t) = +(\frac{v_0}{\omega}) \cos(\omega t) + C_2 \qquad (8)
$$

が得られる。ここで、初めの位置が原点であるという初期条件を用いると

$$
\begin{aligned}
0 &= C_1,\ 0 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right) + C_2 \\
\to x(t) &= (\frac{v_0}{\omega}) \sin(\omega t), \\
y(t) &= \left(\frac{v_0}{\omega}\right) [\cos(\omega t) - 1] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

が得られる。

5. 前問の結果より、$xy$ 面上での軌道の式を求めると

$$
x^2 + \left(y + \frac{v_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \qquad (10)
$$

が得られる。これは点 $(0, -v_0/\omega)$ を中心として、半径 $v_0/\omega$ の円運動を表す。

以上の結果より、$xy$ 面に射影した荷電粒子の運動は角速度 $\omega$ の円運動であり、$z$ 軸方向に等速直線運動をする．すなわち，この荷電粒子は $z$ 方向に移動する<u>らせん運動を行う</u>.

ここで、角速度 $\omega$ が荷電粒子の電荷 $q$ の符号に依存することに注意しよう。これは荷電粒子の電荷 $q$ の符号によって、回転の向きが異なることを意味する。