(サイクロトロン運動２)cycrotron-motion2-qa140623A.tex

直交する一様な電場 (電界）$\boldsymbol{E}=(E,0,0)$ と磁場（磁界）$\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ の中における荷電粒子（質量 m, 電荷 q）の運動を次の手順で求めよ。

1. この荷電粒子の任意時刻における速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ として，ニュートンの運動方程式を記し，微分方程式としての種類を述べよ。
2. 電場がゼロの場合の速度ベクトルに対する一般解 $\boldsymbol{v}_0(t)$ を求めよ (＝解け）．(積分によって生じる任意定数は適当に定義してよい．)
3. 電場がゼロではない場合の特殊解 $\boldsymbol{v}_1(t)$ を求めよ．
4. 以上の結果をまとめると、荷電粒子はどのような運動をするか述べよ。

(解答例)

1. 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を用いた運動方程式は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1}$$

となる．ここで, 未知数 $\boldsymbol{v}$ について整理すると

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}-q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = q\boldsymbol{E} \tag{2}$$

と書ける．この式の右辺は未知数 $\boldsymbol{v}$ について 1 次であるが，右辺は 0 次であるので，この方程式は 非同次（または非斉次）微分方程式 である．

非同次（または非斉次）微分方程式の一般解 $\boldsymbol{v}$ は，右辺をゼロにおいた同次（または斉次）微分方程式の一般解 (今，$\boldsymbol{v}_0$ とおく）と非同次（または非斉次）微分方程式の特殊解（今，$\boldsymbol{v}_1$ とおく）の和として書ける．すなわち，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1$.

2. 任意のベクトル $\boldsymbol{C}=(C_x,C_y,C_z), \boldsymbol{D}=(D_x,D_y,D_z)$ に対して，それらの外積 (ベクトル積）は $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}=(C_yD_z-C_zD_y, C_zD_x-C_xD_z, C_xD_y-C_yD_z)$ である．

まず，この荷電粒子に対するローレンツ力は $q\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}=(qv_{y0}B,-qv_{x0}B)$ なので、運動方程式 $md\boldsymbol{v}_0/dt=q\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}$ を x,y,z 成分に分けて記すと

$$m\frac{dv_{x0}}{dt}=qv_{y0}B,\ m\frac{dv_{y0}}{dt}=-qv_{x0}B,\ m\frac{dv_{z0}}{dt}=0 \tag{3}$$

となる。

次に，これら 3 つの式の最後の式から、z 軸方向では荷電粒子は等速直線運動をすることがわかる。すなわち、

$$v_{z0}=\text{constant.} \tag{4}$$

続いて，式 (3) の第 1 式、第 2 式を用いて

$$
\begin{aligned}
& v_{x0}\frac{dv_{x0}}{dt}+v_{y0}\frac{dv_{y0}}{dt}=0\ \rightarrow v_{x0}^2+v_{y0}^2=\text{constant}\equiv v_{00}^2 \\
\rightarrow \quad & v_{x0}(t)=v_{00}\cos\theta,\ v_{y0}(t)=v_{00}\sin\theta\ (\theta=\theta(t))) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

が得られる。さらに、式（5）を式 (3) の第 1 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
-mv_{00}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} &= qv_{00}B\sin\theta \rightarrow\ \frac{d\theta}{dt}=-\frac{qB}{m}\equiv-\omega \\
\rightarrow\ \theta &= -\omega t. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

したがって、速度の x,y 成分は次のように求められる。

$$
v_{x0}(t)=v_{00}\cos(\omega t),\ v_{y0}(t)=-v_{00}\sin(\omega t). \qquad (7)
$$

電場がゼロの場合，磁場に垂直な面（xy 面）に射影した荷電粒子の運動は点 (x_0,y_0) のまわりの、角速度 $\omega=qB/m$、半径 $v_0/\omega(=mv_0/qB)$ の等速円運動であり、z 軸方向に等速直線運動をする。すなわち、$\boldsymbol{v}_0(t)$ は z 方向に移動するらせん運動を表す.

3. 特殊解は考えるべき微分方程式を満たせば，一定ベクトルでもいいから

$$
0-q\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B} = q\boldsymbol{E} \qquad (8)
$$

が成り立つ．題意より，$\boldsymbol{E}=(E,0,0)$, $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ であるから, $\boldsymbol{v}_1=(0,v_{10},0)$ とおける．この表現を（8) に代入すれば

$$
-v_{10}B=E\rightarrow v_{10}=-\frac{E}{B} \qquad (9)
$$

と求まる。すなわち，すなわち、$\boldsymbol{v}_1(t)$ は y 方向の等速直線運動を表す.

4. 以上の結果より，荷電粒子の運動は z 向きのらせん運動が y 軸向き等速直線運動により斜めにずらされるような運動である.

5. 備考 : 非同次（または非斉次）微分方程式の一般解 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1$ と書けることの説明は以下のとおり．$\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_1$ の定義より

$$
\begin{aligned}
m\frac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}-q\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B} &= 0, \qquad (10) \\
m\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt}-q\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B} &= q\boldsymbol{E} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．まず，式（10）と式（11）を辺々加えると，明らかに $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1$ は式 (2) を満たすので，解であるといえる．次に、微分方程式 (2) は時間 t について，一階の微分方程式で，その一般解は一つの積分定数を含んでいなければならないが，今の場合，それは $\boldsymbol{v}_0$ に含まれることになるからである.