

半径 a の導体球が真空中で電荷 Q だけ帯電している。球コンデンサーの電気容量 $C = 4\pi a\epsilon_0$ として次の問いに答えよ。

1. 導体球の中心から距離 r だけ離れた点における電場の強さ E を求めよ。
2. この導体の周囲の空間 (電場) に蓄えられている静電場のエネルギー U_e を求めよ。
3. この球コンデンサーのもつ静電エネルギー U_c を求めよ。 U_e と違うか、同じか、そしてその意味を述べよ。

(解答例)

1. ガウスの法則より、電荷分布は球対称だから面積分は単なる積になるので、

$$\begin{aligned}\iint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA &= \begin{cases} 0 & 0 \leq r < a \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & r > a \end{cases} \\ \rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 &= \begin{cases} 0 & 0 \leq r < a \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & r > a \end{cases} \\ \rightarrow E(r) &= \begin{cases} 0 & 0 \leq r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > a \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

2. 電場の強さ E をもつ点の周辺の静電場のエネルギー密度 $u_e = \epsilon_0 E^2 / 2$ であるから、

$$\begin{aligned}U_e &= \int_a^\infty u_e(r) \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}. \end{aligned} \quad (2)$$

3. この球コンデンサーのもつ静電エネルギー U_c は

$$\begin{aligned}U_c &= \frac{Q^2}{2C} \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}. \quad (C = 4\pi a\epsilon_0) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。この値は U_e と同じであり、コンデンサーの静電エネルギーは実は周囲の空間 (= 電場) に蓄えられていることを意味する。