電位の概念とその応用

1. 電位の定義ー電気力の，単位電荷当たりの，ポテンシャル
2. 等電位面とその性質
3. 静電場の性質

Made by R. Okamoto (Emeritus Prof., Kyushu Inst. of Tech.),
File name= electric-potentia140519A.ppt

1. 電位の定義－電気力の，単位電荷当たりの，ポテンシャル

力学における保存力*F*とそのポテンシャル（＝位置エネルギー）*U*

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathrm{P}) \equiv -\int_{\mathrm{O}}^{P} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}'$$ 点OはUの基準点、点pの位置ベクトルはr

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\ U(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}),$$

$$\rightleftarrows F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

空間中のある点P（その位置ベクトル*r*）における電場*E*(**r**)とすると，点Pの
電位*V*は次のように定義される.

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathrm{P}) \equiv -\int_{\mathrm{O}}^{P} \mathbf{E}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}';$$ 点Oは*V*の基準点、点pの位置ベクトルはr

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathrm{grad}\ V(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}),$$

$$\rightleftarrows E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

補足１：物理現象は電位そのものではなく、電位差により決まるので、基準点の選び方は任意でもよいが、点電荷（とその集まり）の場合には無限遠方に、そして実際的な場合には地表に選ぶなど、電荷分布の状況により都合よく選ぶ。

電位の単位 $$1\,\mathrm{V} \equiv \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{C}}$$

補足２：電位にΦ[ファイ（phi）と発音]というギリシャ文字．使うテキストもある．
電位の単位（立体の）V（ボルト）と混同する可能性があるので，物理量としての電位*V*(斜体)と混同しないこと。

電位差（または電圧）

点A，Bにおける電位をV(A),$V(B)$とすると，点Bに対する点Aの電位（＝点A，B間の電位差＝電圧）V_{BA}の定義

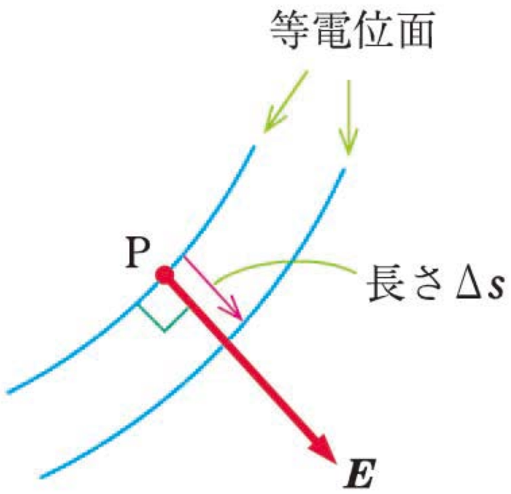
$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{BA}} &\equiv V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) \\
&= -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - (-)\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{B}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{A}^{B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}
\end{aligned}
$$

電位差（電圧）の単位

$$
1\,\mathrm{V} \equiv \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{C}}
$$

電場のする仕事＝電荷×電位差（電圧）

2. 等電位面とその性質



$$V(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})-V(\mathbf{r})=-\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}}\mathbf{E}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}'$$
$$\cong -\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\Delta\mathbf{r}$$
$$=-E_s\Delta s\cdot\cos\theta\ (\theta\text{は}\mathbf{E}(\mathbf{r})\text{と}\Delta\mathbf{r}\text{のなす角度})$$

$$E_s=-\frac{\partial V}{\partial s}$$

$\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$と$\mathbf{r}$が共に等電位面上にあれば,

すなわち, Vの値が一定ならば,

$$\cos\theta=0\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

等電位面と電場ベクトルは垂直

3.静電場の性質

静止した電荷間の力，静電気力（クーロン力）は保存力である

静電気力から静電場***E***が定義され，さらに，それから電位*V*が定義される

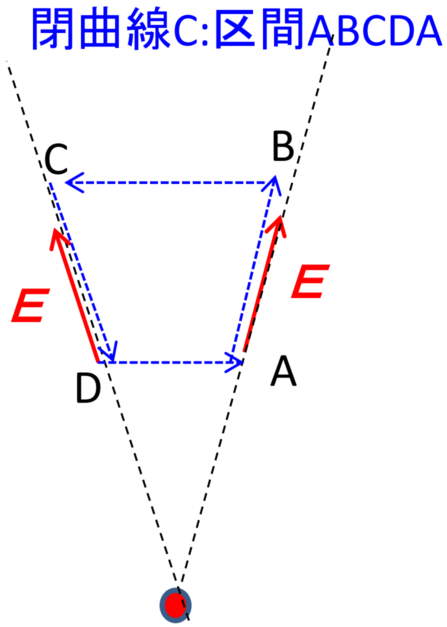
$$V(\mathrm{P}) \equiv -\int_{\mathrm{O}}^{P} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

2点間の電位差も計算される　$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = \int_{A}^{B} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$

閉じた経路Cにそった静電場の線積分の値はゼロとなる

$$\oint_{C} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

実例：点電荷の作る電場の閉曲線に沿っての線積分はゼロ。



AB間：電場ベクトルEの向きと変位ベクトル
　の向きが同じであるから、この区間の線積分の
　値はプラス。
BC間、DA間：Eの向きと変位ベクトルの向きが直交
　するので積分はゼロ。
CD間：Eの向きと変位ベクトルの向きが同じである
　　から、この区間の線積分の値はマイナス。

閉じた区間ABCDAに沿っての線積分の値は相殺して、
ゼロとなる。

参考：静電場とは異なる電場とは？

ファラデーの法則(電磁誘導の法則）に関係する誘導電場(induced electric field)
$\boldsymbol{E}_{\text{induced}}$ に対しては閉じた経路にそった線積分の値がゼロではない。

$$\oint_C \mathbf{E}_{\text{induced}}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

この関係式の意味は何か？

任意のベクトルBに対して，次のようなストークスの定理(循環定理）が成立する。

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \oiint_S \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}dA$$

ただし、ベクトル微分演算子の定義は以下の通りである。

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \text{rot }\mathbf{B}(\mathbf{r})$$
$$\equiv\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

従って、誘導電場の場合

$$\nabla\times\mathbf{E}_{\text{induced}}(\mathbf{r}) \neq 0$$

$$\oint_C \mathbf{E}_{\text{induced}}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

は誘導起電力（＝誘導電位）と呼ばれるものである。

逆に、静電場Eに対しては

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$