(真空中の電磁波の波動方程式 1a:elemagwave1a-qa040727.tex)

真空中のマックスウェル方程式（の微分形）は$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0, \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0, \nabla\times\boldsymbol{H}=\partial\boldsymbol{D}/\partial t, \nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$, ただし、$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ と表される。

1. 真空中で電場 $\boldsymbol{E}$ が y 軸方向、磁場 $\boldsymbol{H}$ が z 軸方向を向き、ともに x, t のみの関数であるとき、マックスウェル方程式（の微分形）を具体的に書け。
2. 電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ が (一次元の) 波動方程式を満たすことを示せ。
3. この波動の（伝搬）速度はどのように表されるか、与えられた文字を用いて表せ。

(解答)

1. 題意より、$\boldsymbol{E}=(0, E_y(x,t), 0), \boldsymbol{H}=(0,0,H_z(x,t))$ と書ける。

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \text{ に代入して } \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial y} &= 0. &(1)\\
\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0 \text{ に代入して } \frac{\partial H_z(x,t)}{\partial z} &= 0. &(2)\\
\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \text{ に代入して } -\frac{\partial H_z(x,t)}{\partial x} &= \varepsilon_0\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}. &(3)\\
\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \text{ に代入して } \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} &= -\mu_0\frac{\partial H_z(x,t)}{\partial t}. &(4)
\end{aligned}
$$

2. (4) 式を x で偏微分して、 (3) 式を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -\mu_0\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial H_z}{\partial t})\\
&= -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial H_z}{\partial x})\\
\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= (\varepsilon_0\mu_0)\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. &(5)
\end{aligned}
$$

得られた式は一次元（x 軸方向に進行または後退する）波動を決める方程式（波動方程式）である。

3. (3) 式を x で偏微分して、 (4) 式を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial E_y}{\partial t})\\
&= -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial E_y}{\partial x})\\
\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= (\varepsilon_0\mu_0)\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. &(6)
\end{aligned}
$$

この式も一次元（x 軸方向に進行または後退する）波動を決める方程式（波動方程式）である

4. 波動方程式の形より、この波動の伝搬速度 v は $v=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$