(ガウスの法則の応用：点電荷のつくる電場と電位）filename=gauss-law-pointcharge-elec-field-qa20190114A.tex

電荷 $Q(>0)$ の点電荷が原点に置かれているとする。電気定数 (真空の誘電率) を ε_0 として，ガウスの法則を用いて，以下の問いに答えよ．

(a) 点電荷から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点における電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きと大きさを求めよ．

(b) 原点から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点における電位 ϕ を求めよ．

(略解例)

(a) 電荷分布は原点のまわりに球対称性をもっている．電荷は正であるあるから、電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きは原点から外向きに放射状となる．点電荷を囲む空間領域の境界となる閉曲面 S として，点電荷からの距離 r を半径とする球面 S を考えて，ガウスの法則を適用する．原点について球対称性であるから，S 上のすべての点において，電場の大きさは同じで向きは外向き法線ベクトルと同じであるから，面積分が電場の大きさと表面積との積になるので

$$\begin{aligned} \oint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \to E\times 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \to E &= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{r^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きと外向き法線ベクトル $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/r$ の向きが一致するので $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}=E$ となることを用いた。

(b) 電位 $\phi(r)$ の定義より, 基準の位置を r_0 とすると

$$\begin{aligned} \phi(r) &= -\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -\int_{r_0}^{r}Edr \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{r} \to (\phi_0=0:\text{基準の位置 } r_0\to\infty \text{ における電位}). \end{aligned} \tag{2}$$

上の積分において，変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル向き (その向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$) 成分 dr とそれに直交する向き (その向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$) の成分 $rd\theta$ を含むが, 電場ベクトル $\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{e}_r$ との内積が

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{E}\cdot(dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta) \\ &= Edr \end{aligned} \tag{3}$$

となることを用いた．($\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r=1$, $\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta=0$.)