半径 a の 導体球 の外側を，同心の半径 b の 球殻の導体 で覆い，導体球に電荷 $Q(>0)$ を与え，さらに外側の球殻をアースする系 (球形コンデンサー) を考える．電気定数 (真空の誘電率) を ε_0 として，ガウスの法則を用いて，以下の問いに答えよ．

(1) 球殻状の導体の電荷はいくらか，

(2) 原点 (球の中心) から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点における電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きと大きさを求めよ．

(3) 原点から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点における電位 ϕ を求めよ．

(4) 球と球殻の電位差 V を求めよ．

(5) このコンデンサーの静電容量 (キャパシタンス)C を求めよ．

(略解例)

(1) 球殻の導体は接地されているので，球の電荷 Q に応じて 静電誘導 により，球殻の導体には電荷 $(-Q)$ が生じる．

(2) 題意より，電荷分布は原点のまわりに球対称性をもっている．電荷は正であるあるから、
電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きは原点から外向きに放射状となる．点電荷を囲む空間領域の境界となる閉曲面 S として，点電荷からの距離 r を半径とする球面 S を考えて，ガウスの法則を適用する．原点について球対称性であるから，S 上のすべての点において，電場の大きさは同じで向きは外向き法線ベクトルと同じであるから，面積分が電場の大きさと表面積との積になる．

球殻の中心を原点とすると，閉曲面 S を考える場合，電荷が存在する半径領域と存在しない半径領域に場合分けをして，ガウスの法則を適用する．

(2.1) $r > b$ (領域 I：球殻の外側) の場合:

この領域に含まれる電荷の代数和は $Q - Q = 0$ であるので，

$$\begin{aligned} \oint \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{n} dS &= 0 \\ \to E_{\mathrm{I}} \times 4\pi r^2 &= 0 \\ \to E_{\mathrm{I}} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きと外向き法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ の向きが一致するので $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = E$ となることを用いた．

(2.2) $a < r < b$(領域 II：球と球殻の中間領域) の場合:

この領域に含まれる電荷は球の電荷 Q だけであるので，

$$
\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\
\to E_{\mathrm{II}} \times 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\
\to E_{\mathrm{II}} &= \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

(2.3) $0 < r < a$(領域 III：球の内部領域) の場合:
この領域に含まれる電荷は存在しないので，

$$
\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{E}_{\mathrm{III}} \cdot \boldsymbol{n} dS &= 0 \\
\to E_{\mathrm{III}} \times 4\pi r^2 &= 0 \\
\to E_{\mathrm{III}} &= 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

(3) 場合分けされた領域ごとに電位を計算する．

(3.1) $r > b$ (領域 I：球殻の外側) の場合::
電位 $\phi(r)$ の定義より，電位の基準点を無限遠方に選んで

$$
\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{I}}(r) &= -\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= -\int_{\infty}^{r} E_{\mathrm{I}} dr \\
&= \text{constant}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

結局，constant，すなわち，位置によらない一定値となる．
上の積分において，変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル向き (その向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$) 成分 dr とそれに直交する向き (その向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$) の成分 $rd\theta$ を含むが，電場ベクトル $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_r$ との内積が

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{E} \cdot (dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta) \\
&= Edr
\end{aligned} \tag{5}
$$

となることを用いた．($\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r = 1$, $\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\theta = 0$.)

(3.2) $a < r < b$(領域 II：球と球殻の中間領域) の場合:
この領域の場合，電位の基準点は $r = b$ であるから

$$
\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{II}}(r) &= -\int_{b}^{r} E_{\mathrm{II}} dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right).
\end{aligned} \tag{6}
$$

(3.3) $0 < r < a$(領域 III：球の内部領域) の場合: この領域の場合，電位の基準点は $r = b$ であるから

$$\begin{aligned} \phi_{\mathrm{III}}(r) &= -\int_b^r E_{\mathrm{III}} dr \\ &= \text{constant}. \end{aligned} \tag{7}$$

(4) 題意より

$$\begin{aligned} V &\equiv \phi_{II}(a) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

(5) 題意より

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \\ &= \frac{4\pi ab\varepsilon_0}{b-a}. \end{aligned} \tag{9}$$