(ガウスの法則の応用：球殻状電荷のつくる電場と電位）filename=gauss-law-sperical-shell-charge-elec-field-pot-qa20190115.tex

半径 a の 十分薄い球殻上に一様に 電荷 $Q(>0)$(または面電荷密度 $\sigma \equiv Q/(4\pi a^2)$) が分布しているとする．電気定数 (真空の誘電率) を ε_0 として，ガウスの法則を用いて，以下の問いに答えよ．

(1) 球殻の中心 (原点) から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点における電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きと大きさを求めよ．

(2) 原点から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点における電位 ϕ を求めよ．

(略解例)

(1) 題意より，電荷分布は原点のまわりに球対称性をもっている．電荷は正であるあるから、
電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きは原点から外向きに放射状となる．点電荷を囲む空間領域の境界となる閉曲面 S として，点電荷からの距離 r を半径とする球面 S を考えて，ガウスの法則を適用する．原点について球対称性であるから，S 上のすべての点において，電場の大きさは同じで向きは外向き法線ベクトルと同じであるから，面積分が電場の大きさと表面積との積になる．

球殻の中心を原点とすると，閉曲面 S を考える場合，電荷が存在する半径領域と存在しない半径領域に場合分けをして，ガウスの法則を適用する．

(1.1) $r > a$(球殻の外側) の場合:

$$
\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{E}_{\text{out}} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\
\to E_{\text{out}} \times 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\
\to E_{\text{out}} &= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{r^2}\left[=\left(\frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}\right]. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きと外向き法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ の向きが一致するので $\boldsymbol{E}_{\text{out}} \cdot \boldsymbol{n} = E$ となることを用いた．

(1.2) $r < a$(球殻の内側) の場合:

$$
\begin{aligned}
\oint \boldsymbol{E}_{\text{in}} \cdot \boldsymbol{n} dS &= 0 \\
\to E_{\text{in}} \times 4\pi r^2 &= 0 \\
\to E_{\text{in}} &= 0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

球殻上に電荷が分布していても，その内部には電場を存在しない，という事実に注意すべきである．

(2) 場合分けされた領域ごとに電位を計算する．

(2.1) $r > a$(球殻の外側) の場合:
電位 $\phi(r)$ の定義より，電位の基準点を無限遠方に選んで

$$\begin{aligned}\phi_{\text{out}}(r) &= -\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{E}_{\text{out}} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -\int_{\infty}^{r} E_{\text{out}} dr \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{r}\left[=\left(\frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r}\right].\end{aligned} \tag{3}$$

上の積分において，変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル向き (その向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$) 成分 dr とそれに直交する向き (その向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$) の成分 $rd\theta$ を含むが，電場ベクトル $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_r$ との内積が

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{E} \cdot (dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta) \\ &= Edr\end{aligned} \tag{4}$$

となることを用いた．($\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r = 1$, $\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\theta = 0$.)

(2.2) $r < a$(球殻の内側) の場合:
この領域の場合，電位の基準点は $r = a$ であるから

$$\begin{aligned}\phi_{\text{in}}(r) &= -\int_{a}^{r} E_{\text{in}} dr \\ &= \text{constant.}\end{aligned} \tag{5}$$

結局，constant，すなわち，位置によらない一定値となる．
電位の値は境界 $r = a$ において，連続でなければならない (注) ので，

$$\begin{aligned}\phi_{\text{in}}(a) &= \phi_{\text{out}}(a) \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{a}\left[=\frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\right].\end{aligned} \tag{6}$$

(注) : 電位を位置変数について微分して、マイナス符号をつけて電場が決まる．ある点において電位が不連続であれば，その点における電場が発散して，物理的に不合理となる．

(3) 参考 : 上記の取り扱いにおいて，球殻上 ($r = a$) における電場の値 $E(a)$ は計算されていない．従って，(6) 式は球殻の外側と内側からの極限操作 $\phi_{\text{in}}(a-0) = \phi_{\text{out}}(a+0)$ の意味である．ガウスの法則を用いず直接に計算するか，特別の考察により，$E(a) = \sigma/(2\varepsilon_0)$ であることが判っている．例えば，徳岡善助編「物理学概論 (下)」(学術図書出版社，1988 年) の p.108 を参照のこと．