電荷 $Q(>0)$ の点電荷が原点ある。真空の誘電率を ε_0 として, ガウスの法則を用いて次の問いに答えよ。

1. 原点から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点における電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きと大きさを求めよ。
2. 原点から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点における電位 ϕ を求めよ。

(略解例)

1. 電荷分布は原点のまわりに球対称性をもっている。電荷は正であるあるから、電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きは原点から外向きに放射状となる。原点から半径 r の球面を考える。ガウスの法則を適用すると

$$\begin{aligned} \iint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \rightarrow E\times 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E &= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{r^2} \end{aligned} \tag{1}$$

電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の向きと法線ベクトル $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/r$ の向きは一致するので $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}=E$ となることを用いた。

2. 電位 $\phi(r)$ で電場 E の関係式より,

$$\begin{aligned} \phi(r) &= -\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{r_0}^{r}Edr \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{r} \quad (\phi_0=0: \text{基準の位置 } r_0\rightarrow\infty \text{ における電位}). \end{aligned} \tag{2}$$

上の積分において, 変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル向き (その向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$) 成分 dr とそれに直交する向き (その向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$) の成分 $rd\theta$ を含むが、電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ との内積が

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{E}\cdot(dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta) \\ &= Edr \end{aligned} \tag{3}$$

となることを用いた。

備考：この結果は、ガウスの法則がクーロンの法則を含むより一般的な法則であることを示している。