(電磁誘導：LC 回路における充電)induction-LC-charging-qa140728A.tex
電気抵抗 (大きさ R) とコイル (自己インダクタンス L) と電池（起電力 V_0) を直列につなぐ LR 回路において、時刻 $t=0$ にスイッチを入れる.

1. その後どのような電流が流れるか求めよ。
2. 時間 t を横軸、電流の強さ $I(t)$ を縦軸にとり、結果の概略をグラフとして描け。

(解答例)

1. 電磁誘導の法則を用いて，LR 回路にキルヒホッフの第 2 法則を適用すると

$$V_0 + \left(-L\frac{dI}{dt}\right) = IR \tag{1}$$

が成り立つ。ここで、$V_0,\ L,\ R$ は一定で、$I = I(t)$ であることに注意する。式 (1) は非同次 (または非斉次) の微分方程式であることを考慮して、次のように式変形して、まず一般解を求める。

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= -\frac{R}{L}I + \frac{V_0}{L} = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{V_0}{R}\right) \\
\to \frac{dI}{\left(I - \frac{V_0}{R}\right)} &= -\frac{R}{L}dt \to \log_{\mathrm{e}}\left|I - \frac{V_0}{R}\right| = -\frac{R}{L}t + C\ (C:\text{任意定数}) \\
\to I(t) &= \frac{V_0}{R} + C'\mathrm{e}^{-Rt/L}\ (C' \equiv \pm\mathrm{e}^{C}:\text{任意定数}).
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで、初期条件 $I(0) = 0$ を式 (2) に代入して，特殊解が得られる。

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{V_0}{R} + C' \to C' = -\frac{V_0}{R} \\
\to I(t) &= \frac{V_0}{R}(1 - \mathrm{e}^{-R\ t/L})
\end{aligned} \tag{3}$$

2. 前問の結果について、$I'(t=0) = V_0/L > 0,\ I(t \to \infty) = V_0/R$ であることを考慮するとグラフの概略は次のように描ける。